四元数法及其应用

○ 程 国 采 编著

○ 国 防 科 技 大 学 出版社

内 容 简 介

本书针对航天飞行器的姿态控制问题，首先叙述四元数的基本理论及其计算方法，然后研究了在刚体姿控中利用四元数作为误差信号的控制稳定性问题，以及四元数的最优控制问题。

本书可作为自动控制类研究生及科技人员的参考书。

四元数法及其应用

程国采　编著

责任编辑　钟　平

封面设计　侯　云

责任校对　朱宝龙

*

国防科技大学出版社出版发行

湖 南 省 新 华 书 店 经 销

国防科技大学印刷厂印刷

*

850×1168　1/32　印张：5.875　字数：142千

1991年11月第1版　1991年11月第1次印刷　印数：700册

序　言

四元数的基本概念，早在1843年B.P.哈密顿就提出来了。但一直停留在理论概念的探讨阶段，没有得到广泛的实际应用。近年来，由于航天技术的发展，需要解决大姿态角的控制问题。传统的欧拉角法，由于在大姿态角情况下，欧拉方程是奇异的，给解大姿态角带来了困难。因而，四元数法日益受到重视。由于四元数方程是线性的，只有一个联系方程，在解算大姿态角时，带来很大方便，特别是可以直接用四元数分量作为控制信号，使四元数法的应用，得到很大的发展。

70年代以来，数字计算机和计算技术的发展，有可能进行误差信号的合理选择和控制，四元数作为最理想的控制参数，被广泛采用，诸如导弹制导、载人飞船和航天飞机中的很多姿态控制任务中，都引用了四元数法。

四元数具有很强的物理意义，它可以表征刚体姿态变换时的瞬时欧拉轴和所需的转角，作为一种姿态控制方法，是既古老而又年青的，在实际应用中，还有很多理论和实际问题需要解决。

本书前两章是基本理论部分，叙述四元数的基本理论及其计算方法。后两章是应用部分，首先研究了在刚体姿态控制中利用四元数作为误差信号的控制稳定性问题，并分别对姿态控制中的定向问题和定位问题进行了研究。然后，利用最优控制理论研究了四元数的最优控制问题。给出了飞行器姿态控制喷嘴的开关控制规律，并结合航天飞行器姿态控制典型情况进行

了研究。

本书引用了近年来有关四元数法的最新成果，可作为研究生教材和科研参考书。

研究生李华滨同志认真细致地校阅了全书，在此表示感谢。

程国采

一九九一年十月

目　　录

第一章　四元数定义及其基本性质

§1　引　言

在研究航天飞行器的姿态控制问题时，经常遇到坐标变换运算。传统的解坐标变换的方法是三参数法、六参数和九参数法。

三参数法是解两坐标系中的三个欧拉角。以体坐标系$ox_1y_1z_1$对惯性坐标系$ox_0y_0z_0$的变换为例，如图 1.1，其转换

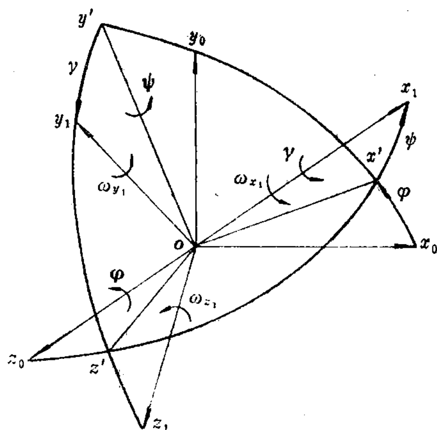


图 1.1　体坐标系与惯性坐标系关系图

次序为

$$ox_0y_0z_0 \xrightarrow{\varphi} ox'y'z_0 \xrightarrow{\psi} ox_1y'z' \xrightarrow{\gamma} ox_1y_1z_1$$

这里φ为俯仰角；

ψ为偏航角；

γ为滚动角。

如果以$\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{z}_0$；$\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{y}_1$、$\boldsymbol{z}_1$分别表示各轴向单位矢量，则

$$
\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{z}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi & 0 & \cos\psi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{y}_0\\ \boldsymbol{z}_0\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\\ \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma-\sin\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma+\cos\varphi\cos\gamma & \cos\psi\sin\gamma\\ \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma+\sin\varphi\sin\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma-\cos\varphi\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{y}_0\\ \boldsymbol{z}_0\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{y}_0\\ \boldsymbol{z}_0\end{bmatrix} \tag{1.1}
$$

即

$$
\boldsymbol{r}_1=B\boldsymbol{r}_0 \tag{1.2}
$$

为了解出欧拉角φ、ψ、γ，需建立欧拉角速度方程。

设$\boldsymbol{\omega}_1$是体坐标系$ox_1y_1z_1$相对于惯性坐标系$ox_0y_0z_0$的旋转角速度，它在体坐标系$ox_1y_1z_1$三轴上的分量为ω_{x_1}、ω_{y_1}、ω_{z_1}，则

$$
\boldsymbol{\omega}_{x_1}+\boldsymbol{\omega}_{y_1}+\boldsymbol{\omega}_{z_1}=\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\dot{\boldsymbol{\psi}}+\dot{\boldsymbol{\gamma}} \tag{1.3}
$$

由图1.1知

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\varphi}\bar{z}_0 = \dot{\varphi}\cos\psi\bar{z}' - \dot{\varphi}\sin\psi\bar{x}_1 \\
\quad = -\dot{\varphi}\sin\psi\bar{x}_1 + \dot{\varphi}\cos\psi\sin\gamma\bar{y}_1 + \dot{\varphi}\cos\psi\cos\gamma\bar{z}_1 \\
\dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot{\psi}\bar{y}_1 = \dot{\psi}\cos\gamma\bar{y}_1 - \dot{\psi}\sin\gamma\bar{z}_1 \\
\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\gamma}\bar{x}_1
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

故得欧拉角速度方程如下：

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\omega_{y_1}\sin\gamma + \omega_{z_1}\cos\gamma}{\cos\psi} \\
\dfrac{d\psi}{dt} = \omega_{y_1}\cos\gamma - \omega_{z_1}\sin\gamma \\
\dfrac{d\gamma}{dt} = \omega_{x_1} + (\omega_{y_1}\sin\gamma + \omega_{z_1}\cos\gamma)\mathrm{tg}\psi
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

此方程组为非线性变系数微分方程组，如果知道瞬间角速度ω_{x_1}、ω_{y_1}、ω_{z_1}，则在给定的起始条件下，解方程组，即可求出$\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\gamma(t)$。但存在如下两个问题。

（1）方程组(1.5)为非线性变系数微分方程，只能用数值积分法求解，计算工作量大。

（2）在大姿态角情况下，例如$\psi \to \pi/2$，会引起较大的计算误差，且当$\psi = \pi/2$时，方程是奇异的。

故往往要另寻其他解法，六参数法、九参数法和四元数法即是解姿态变化的其他几种方法。

六参数法和九参数法是解坐标变换的方向余弦，由(1.2)式

$$
\boldsymbol{r}_1 = B\boldsymbol{r}_0
$$

$$
\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1 = \dot{B}\boldsymbol{r}_0 \tag{1.6}
$$

$$
\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1 = \Omega\boldsymbol{r}_1 = \Omega B\boldsymbol{r}_0 \tag{1.7}
$$

式中

$$\Omega=\begin{bmatrix} 0, & -\omega_{z_1}, & \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1}, & 0, & -\omega_{x_1} \\ -\omega_{y_1}, & \omega_{x_1}, & 0 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

故
$$\dot{B}=\Omega B \tag{1.9}$$

即

$$\begin{cases} \dot{b}_{11}=\omega_{y_1}b_{31}-\omega_{z_1}b_{21} \\ \dot{b}_{12}=\omega_{y_1}b_{32}-\omega_{z_1}b_{22} \\ \dot{b}_{13}=\omega_{y_1}b_{33}-\omega_{z_1}b_{23} \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \dot{b}_{21}=\omega_{z_1}b_{11}-\omega_{x_1}b_{21} \\ \dot{b}_{22}=\omega_{z_1}b_{12}-\omega_{x_1}b_{22} \\ \dot{b}_{23}=\omega_{z_1}b_{13}-\omega_{x_1}b_{23} \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} \dot{b}_{31}=\omega_{x_1}b_{21}-\omega_{y_1}b_{11} \\ \dot{b}_{32}=\omega_{x_1}b_{22}-\omega_{y_1}b_{12} \\ \dot{b}_{33}=\omega_{x_1}b_{23}-\omega_{y_1}b_{13} \end{cases} \tag{1.12}$$

由于B为正交变换阵，故需满足以下六个约束条件：

$$\begin{cases} b_{11}^2+b_{12}^2+b_{13}^2=1 \\ b_{21}^2+b_{22}^2+b_{23}^2=1 \\ b_{31}^2+b_{32}^2+b_{33}^2=1 \\ b_{11}b_{21}+b_{12}b_{22}+b_{13}b_{23}=0 \\ b_{11}b_{31}+b_{12}b_{32}+b_{13}b_{33}=0 \\ b_{21}b_{31}+b_{22}b_{32}+b_{23}b_{33}=0 \end{cases} \tag{1.13}$$

九参数法即是在约束条件(1.13)下，解方程组(1.10)，(1.11)和(1.12)。而六参数法，则是在(1.13)约束下，解六个变量的微分方程。可以看出无论是九参数法还是六参数法，由于要满足六个非线性约束方程，计算起来是十分不方便的。

下面介绍的四元数法，则具有如下的优点：

(1) 四元数方程是线性微分方程，只有一个约束条件，便于计算，与欧拉角速度方程比，其计算量仅为欧拉方程的35%左右。

(2) 在进行模拟和数字计算时，精度高于欧拉方程，且不会出现奇异现象。

(3) 可直接用四元数作为捷连系统的控制量，便于系统分析和讨论，优于欧拉角。

早在1843年，哈密顿(Hamilton B.P.)就建立了四元数代数学。但一直没有得到任何实际的应用。近年来，随着计算技术的发展，四元数法在飞行器控制系统中得到日益广泛的应用，我国已故数学家关肇直同志就曾研究过用四元数法解飞行器的姿态问题。实践证明，四元数法在建立捷连式惯性系统、刚体姿态控制、定位和稳定的控制中都得到广泛的应用，并显示出其优越性。

§2 四元数代数学

四元数是由于要将三维矢量代数运算推广到乘法和除法运算的必要性而产生的。

四元数是由一个实数单位和三个虚数单位 i, j, k 组成的，通常写成

$$\lambda=\lambda_0\cdot 1+\lambda_1 i+\lambda_2 j+\lambda_3 k \tag{1.14}$$

式中λ_0、λ_1、λ_2、λ_3均为实数，i、j、k 服从以下运算规律，如图1.2，顺时针相乘为正，逆时针为负，即

$$\begin{cases} ij=k=-ji \\ jk=i=-kj \\ ki=j=-ik \\ i^2=j^2=k^2=-1 \end{cases} \tag{1.15}$$

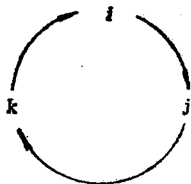


图 1.2 乘法顺序图

可以看出，如果 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，则四元数退化为实数，如果 $\lambda_2=\lambda_3=0$，则四元数退化为复数，所以称四元数为超复数。

如果把i、j、k理解为三维空间的互相正交的三个单位矢量，则可将四元数看成是由标量部分(通常以符号sqal或scal表之）和矢量部分（通常以vect表之）组成。

$$\lambda=\lambda_0+\boldsymbol{\lambda} \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\lambda_1\mathrm{i}+\lambda_2\mathrm{j}+\lambda_3\mathrm{k} \tag{1.17}$$

有时也可用一个四维矢量来表示四元数。

$$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^T \tag{1.18}$$

下面我们将证明四元数组成四元数域（或超复法域）。

域的定义：在非空集合Q上，定义两种运算（加法和乘法）。适合

（1）加法适合交换律、结合律。

（2）乘法适合结合律、分配律。

（3）具有单元、零元和逆元。

则形成域(Field)。

现在来研究四元数。

（1）加法

任取两四元数

$$\begin{cases} q=q_0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k} \\ p=p_0+p_1\mathrm{i}+p_2\mathrm{j}+p_3\mathrm{k} \end{cases} \tag{1.19}$$

则 $$q+p=(q_0+p_0)+(q_1+p_1)\mathrm{i}+(q_2+p_2)\mathrm{j}+(q_3+p_3)\mathrm{k} \tag{1.20}$$

可以看出任意两四元数相加仍为四元数，且可以证明四元数加法满足交换律和结合律。

（2）乘法

$$\begin{aligned} qp=&(q_0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k})(p_0+p_1\mathrm{i}+p_2\mathrm{j}+p_3\mathrm{k}) \\ =&[q_0p_0-(q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3)] \\ &+[q_1p_0+q_0p_1+(q_2p_3-q_3p_2)]\mathrm{i} \\ &+[q_2p_0+q_0p_2+(q_3p_1-p_1q_3)]\mathrm{j} \end{aligned}$$

$$+[q_3p_0+q_0p_3+(q_1p_2-q_2p_1)]\mathrm{k} \qquad (1.21)$$

故四元数乘四元数仍为四元数，四元数乘法以符号“*”表之。

为了运算方便，四元数乘法可以有以下两种表示式：

1） 借用矢量运算符号的表示法

设 $q=q_0+\boldsymbol{q}=q_0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k}$

$p=p_0+\boldsymbol{p}=p_0+p_1\mathrm{i}+p_2\mathrm{j}+p_3\mathrm{k}$

则

$$\begin{aligned} q*p=&[q_0p_0-(q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3)]\\ &+(q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k})p_0\\ &+q_0(p_1i+p_2\mathrm{j}+p_3\mathrm{k})\\ &+[(q_2p_3-q_3p_2)\mathrm{i}+(q_3p_1-q_1p_3)\mathrm{j}\\ &+(q_1p_2-q_2p_1)\mathrm{k}]\\ =&q_0p_0-(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})+\boldsymbol{q}p_0+q_0\boldsymbol{p}+(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}) \end{aligned} \qquad (1.22)$$

故 $p*q=p_0q_0-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})+\boldsymbol{p}q_0+p_0\boldsymbol{q}+(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})$

由于 $(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})=-(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\neq(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})$

故 $q*p\neq p*q$

即四元数乘法不适合交换律，但可以证明它满足结合律和分配律。

2） 矩阵形式的表示法

将四元数写成四维矢量形式

$$q=(q_0,q_1,q_2,q_3)^T$$
$$p=(p_0,p_1,p_2,p_3)^T$$

则

$$q*p=\begin{bmatrix} q_0, & -q_1, & -q_2, & -q_3\\ q_1, & q_0, & -q_3, & q_2\\ q_2, & q_3, & q_0, & -q_1\\ q_3, & -q_2, & q_1, & q_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0\\ p_1\\ p_2\\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} q_0p_0 & -q_1p_1 & -q_2p_2 & -q_3p_3 \\ q_1p_0 & +q_0p_1 & -q_3p_2 & +q_2p_3 \\ q_2p_0 & +q_3p_1 & +q_0p_2 & -q_1p_3 \\ q_3p_0 & -q_2p_1 & +q_1p_2 & +q_0p_3 \end{bmatrix} \tag{1.23}
$$

$$
=\begin{bmatrix} p_0, & -p_1, & -p_2, & -p_3 \\ p_1, & p_0, & p_3, & -p_2 \\ p_2, & -p_3, & p_0, & p_1 \\ p_3, & p_2, & -p_1, & p_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{1.24}
$$

我们把矩阵

$$
V(q)=\begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \tag{1.25}
$$

称为核矩阵，由(1.23)和(1.24)式可以看出在用矩阵形式进行乘法运算时，如果欲将四元数次序颠倒，则需将核矩阵转置。

(3) 单元、零元和负四元数

四元数单元为 $I=1+0\mathrm{i}+0\mathrm{j}+0\mathrm{k}$ (1.26)

四元数零元为 $0=0+0\mathrm{i}+0\mathrm{j}+0\mathrm{k}$ (1.27)

四元数负元为 $-q=-q_0-q_1\mathrm{i}-q_2\mathrm{j}-q_3\mathrm{k}$ (1.28)

(4) 逆元

四元数逆元以q^{-1}表示之

$$
q^{-1}=\frac{1}{q_0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k}}
$$

$$
=\frac{q_0-q_1\mathrm{i}-q_2\mathrm{j}-q_3\mathrm{k}}{(q_0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k})(q_0-q_1\mathrm{i}-q_2\mathrm{j}-q_3\mathrm{k})}
$$

$$
=\frac{q_0-q_1\mathrm{i}-q_2\mathrm{j}-q_3\mathrm{k}}{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}=\frac{q^*}{N^2(q)} \tag{1.29}
$$

式中 $q^*=q_0-q_1\mathrm{i}-q_2\mathrm{j}-q_3\mathrm{k}$ (1.30)

称为四元数 q 的共轭四元数。

$N(q)=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$称为四元数的范数。

若 $N(q)=1$，则

$$q^{-1}=q^* \tag{1.31}$$

即逆元素等于它的共轭元素。四元数 q 是正规的。

(5) 除法：是唯一的，由于乘法是不可交换的，故除法分左除和右除。

例如q、p、x为三个四元数

$q*x=p$ 则 $x=q^{-1}*p$

$x*q=p$ 则 $x=p*q^{-1}$

因 $q^{-1}*p\neq p*q^{-1}$，故两 x 不相等。

由以上叙述可知四元数全体，组成四元数域，或称超复数域，它包含了复数域和实数域。

根据四元数的定义，四元数具有如下性质：

(1) 四元数之和的共轭四元数等于共轭四元数之和。

$$(q+p+\lambda)^*=q^*+p^*+\lambda^* \tag{1.32}$$

(2) 四元数之积的共轭四元数等于其共轭四元数以相反顺序相乘之积

$$(q*p*\lambda)^*=\lambda^* * p^* * q^*$$
$$(\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_n)^*=\lambda_n^**\lambda_{n-1}^**\cdots*\lambda_2^**\lambda_1^* \tag{1.33}$$

(3) 诸四元数之逆，由下式给出

$$(\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_n)^{-1}=\frac{(\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_n)^*}{\|\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_n\|}=\lambda_n^{-1}*\lambda_{n-1}^{-1}*\cdots*\lambda_2^{-1}*\lambda_1^{-1} \tag{1.34}$$

(4) 四元数之积的范数等于其因子范数之积

$$\|\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_n\|=\|\lambda_1\|\|\lambda_2\|\cdots\|\lambda_n\| \qquad (1.35)$$

（5）仅在因子中的一个等于零时，两四元数之积才等于零。

例如　$q*p=0$，则$\|q*p\|=0$，$\|q\|*\|p\|=0$

因$\|q\|$，$\|p\|$为标量，故或者$\|q\|=0$，或者$\|p\|=0$，也即$q=0$或$p=0$时，$q*p=0$才有可能。

（6）诸四元数相乘，当其因子循环置换时，四元数乘积的标量部分不变。即

$$\mathrm{Scal}[\lambda*q*p]=\mathrm{Scal}[q*p*\lambda]=\mathrm{Scal}[p*\lambda*q] \qquad (1.36)$$

但　$\mathrm{Scal}[\lambda*q*p]\neq\mathrm{Scal}[\lambda*p*q]$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{Scal}[\lambda*q*p]&=\mathrm{Scal}\{(\lambda_0+\boldsymbol{\lambda})*[q_0p_0-(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})\\&\quad+q_0\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}p_0+(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})]\}\\&=\lambda_0q_0p_0-\lambda_0(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})-q_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{p})\\&\quad-(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{q})p_0-\boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

因

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})=\begin{vmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\q_1&q_2&q_3\\p_1&p_2&p_3\end{vmatrix}$$

故因子循环置换时，乘积的标量部分不变；而非循环置换时，则不相等。

（7）三个四元数相乘，当因子循环置换时，四元数乘积的矢量部分不相等，即

$$\mathrm{Vect}[\lambda*q*p]\neq\mathrm{Vect}[q*p*\lambda]$$

但有

$$\mathrm{Vect}[\lambda*q*p]=\mathrm{Vect}[p*q*\lambda] \qquad (1.37)$$

[证]

$$\begin{aligned}\text{Vect}[\lambda*q*p] &= \lambda_0 q_0 \boldsymbol{p} + \lambda_0 p_0 \boldsymbol{q} + q_0 p_0 \boldsymbol{\lambda} - (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})\lambda \\ &\quad + \lambda_0(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}) + q_0(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{p}) \\ &\quad + p_0(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{\lambda}\times(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}) \\ &= \lambda_0 q_0 \boldsymbol{p} + \lambda_0 p_0 \boldsymbol{q} + q_0 p_0 \boldsymbol{\lambda} \\ &\quad + \lambda_0(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}) + q_0(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{p}) + p_0(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{q}) \\ &\quad - (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{q}) \\ &= \text{Vect}[p*q*\lambda] \neq \text{Vect}[q*p*\lambda].\end{aligned}$$

§3 四元数的规范化形式及其球面表示法

设任意四元数

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{i} + \lambda_2 \mathrm{j} + \lambda_3 \mathrm{k} \tag{1.38}$$

利用以下方法将其规范化。将 λ 写成

$$\begin{aligned}\lambda &= N(\lambda)\left(\frac{\lambda_0}{N(\lambda)} + \frac{\lambda_1 \mathrm{i} + \lambda_2 \mathrm{j} + \lambda_3 \mathrm{k}}{N(\lambda)}\right) \\ &= N(\lambda)\left(\frac{\lambda_0}{N(\lambda)} + \frac{\boldsymbol{\lambda}}{N(\lambda)}\right)\end{aligned} \tag{1.39}$$

式中　范数　$N(\lambda) = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$ 称为四元数的张量

$\frac{\lambda_0}{N(\lambda)} + \frac{\boldsymbol{\lambda}}{N(\lambda)}$ 称为四元数的回量。

引入单位矢量$\boldsymbol{\zeta}$，则

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \tag{1.40}$$

则回量的矢量部分

$$\frac{\lambda}{N(\lambda)}=\zeta\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} \tag{1.41}$$

则

$$\lambda=N\left[\frac{\lambda_0}{N}+\frac{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}{N}\zeta\right] \tag{1.42}$$

这就是四元数的规范化，因为规范四元数的标量部分的平方$(\lambda_0/N)^2$与单位矢量ζ的系数的平方$(\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}/N)^2$之和为1，故可令

$$\frac{\lambda_0}{N}=\cos\theta,\quad \frac{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}{N}=\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{1.43}$$

则四元数

$$\lambda=N(\cos\theta+\zeta\sin\theta) \tag{1.44}$$

角θ的符号取决于单位矢量ζ的符号选择，也即是ζ方向的选择。

用(1.44)式来表示四元数，运算起来是很方便的，因为$\zeta*\zeta=-(\zeta\cdot\zeta)=-1$，与复数相似，可以有类似于棣莫佛公式的结果，即

$$\lambda^n=N^n(\cos\theta+\zeta\sin\theta)^n=N^n(\cos n\theta+\zeta\sin n\theta) \tag{1.45}$$

对于任何次幂n都是正确的。

利用(1.44)式，可以得到直观的四元数几何解释，研究规范四元数E

$$E=\cos\theta+\zeta\sin\theta$$

在垂直于ζ的平面上选择两个矢量如图1.3.

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}=a_1\mathrm{i}+a_2\mathrm{j}+a_3\mathrm{k}\\ \boldsymbol{b}=b_1\mathrm{i}+b_2\mathrm{j}+b_3\mathrm{k}\end{cases} \tag{1.46}$$

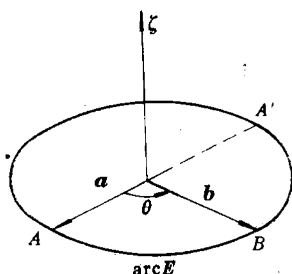


图 1.3 规范四元数的几何表示图

此两矢量满足如下条件：

(1) 令$a=\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|}$，$b=\sqrt{\|\boldsymbol{b}\|}$，则$a=b$

(2) $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间夹角为θ

(3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{\zeta}$构成右旋坐标系（不一定是正交的）。如图1.3，图中规定了$\boldsymbol{\zeta}$和θ的正向。则

$$E=\cos\theta+\boldsymbol{\zeta}\sin\theta=\frac{ab\cos\theta+\boldsymbol{\zeta}ab\sin\theta}{\|\boldsymbol{a}\|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|}$$

$$=\frac{-\mathrm{Scal}(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})+\mathrm{Vect}(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|}$$

$$=-\frac{\mathrm{Scal}(\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a})+\mathrm{Vect}(\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{a}\|}=-\frac{\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=\frac{\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}^*}{\|\boldsymbol{a}\|}$$

$$=\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}^{-1} \tag{1.47}$$

故任一规范四元数可以用单位矢量$\boldsymbol{\zeta}$的垂直平面上两矢量四元数之积来表示。

研究图1.3可以发现，规范四元数E可单值地用大圆弧arc$E$表示。arc$E$所在的平面取决于矢量$\boldsymbol{\zeta}$，而弧长取决于θ。其方向由矢量$\boldsymbol{\zeta}$的方向来确定。注意：弧E在其大圆上的位置是任意的，即可以滑动的。

研究几种特殊情况：

当$\theta=0$时，$E=1$，相当旋球面上的任意一点，ζ可具有任意方向。

当$\theta=\pi$时，$E=-1$，相当于半圆弧，ζ 可具有任意方向。

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，$E=\zeta$

如图1.3，arc$E=AB$对应于四元数E，因

$$E^{-1}=E^{*}=\cos\theta-\zeta\sin\theta \tag{1.48}$$

为沿ζ反向转 θ 角，对应于BA弧，

$$-E=-\cos\theta-\zeta\sin\theta=\cos(\pi-\theta)-\zeta\sin(\pi-\theta) \tag{1.49}$$

为沿ζ反向转$\pi-\theta$角，对应于$A'B$弧。

进一步研究四元数乘法运算在球面上的表示法。

设q、p为两个给定的规范四元数

$$q=\cos\theta_1+\boldsymbol{q}\sin\theta_1$$

$$p=\cos\theta_2+\boldsymbol{p}\sin\theta_2$$

如图1.4作单位球，过球心 o 作矢量$\boldsymbol{q}$，并在与其相垂直的大圆

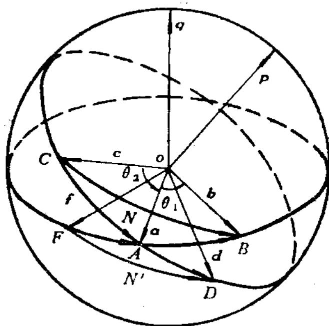


图 1.4　四元数乘法运算在球面上的表示

面上作矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，其夹角为θ_1，则

$$q=\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}^{-1}$$

$\mathrm{arc}AB$对应于四元数$\boldsymbol{q}$.

作矢量$\boldsymbol{p}$，并在与其相垂直的大圆面上作矢量$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{a}$，其夹角为θ_2，则

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c}^{-1}$$

$\mathrm{arc}CA$对应于四元数$\boldsymbol{p}$.

$$\mathrm{arc}CB=\mathrm{arc}CA+\mathrm{arc}AB \tag{1.50}$$

如果设$\mathrm{arc}CB$对应于四元数N，则$\boldsymbol{N}$垂直于矢量$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{b}$所确定的平面，则

$$N=\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c}^{-1}=\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}^{-1}*\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c}^{-1}=q*p \tag{1.51}$$

故知球面上各弧的几何加法运算，对应于相应的四元数的乘法运算，其次序相反。

$$\mathrm{arc}p+\mathrm{arc}q=\mathrm{arc}(q*p) \tag{1.52}$$

由于四元数所对应的弧是可以滑动的，将AB弧滑动至FA，并设$\boldsymbol{OF}=\boldsymbol{f}$，则

$$q=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{f}^{-1}$$

将CA弧滑动至AD，并设$\boldsymbol{OD}=\boldsymbol{d}$，则

$$p=\boldsymbol{d}*\boldsymbol{a}^{-1}$$

连大圆弧FD，则FD为弧FA与弧AD的几何和，设对应于弧FD的四元数为N'，则$\boldsymbol{N}'$垂直于由矢量$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{d}$所确定的平面，则

$$N'=\boldsymbol{d}*\boldsymbol{f}^{-1}=\boldsymbol{d}*\boldsymbol{a}^{-1}*\boldsymbol{a}*\boldsymbol{f}^{-1}=p*q \tag{1.53}$$

即

$$\mathrm{arc}q+\mathrm{arc}p=\mathrm{arc}(p*q) \tag{1.54}$$

由此可以看出四元数乘法运算时，交换因子所发生的情况。在球面上，弧段的加法运算不适合交换律，即

$$\mathrm{arc}p+\mathrm{arc}q\neq\mathrm{arc}q+\mathrm{arc}p \tag{1.55}$$

当三个大圆弧λ、q、p几何相加时，则

$$\mathrm{arc}p+\mathrm{arc}q+\mathrm{arc}\lambda=\mathrm{arc}(\lambda*q*p) \tag{1.56}$$

故每个大圆弧都是由一个四元数给定的，若干个大圆弧之和，

给出一个由这些四元数相反顺序的乘积所决定的大圆弧。

因为等于 1 的四元数相当于球面上的一点，故对于闭合球面三角形如图1.5所示，有

$$\mathrm{arc}\lambda+\mathrm{arc}q+\mathrm{arc}p=0$$

即
$$\mathrm{arc}(p*q*\lambda)=0 \tag{1.57}$$

$$p*q*\lambda=1 \tag{1.58}$$

故
$$\lambda_n*\lambda_{n-1}*\cdots*\lambda_1=1$$

表示对应于 λ_1、λ_2、$\cdots\lambda_{n-1}$、λ_n 的弧构成闭合球面多边形。

利用以上性质，可导出所有的球面三角公式。

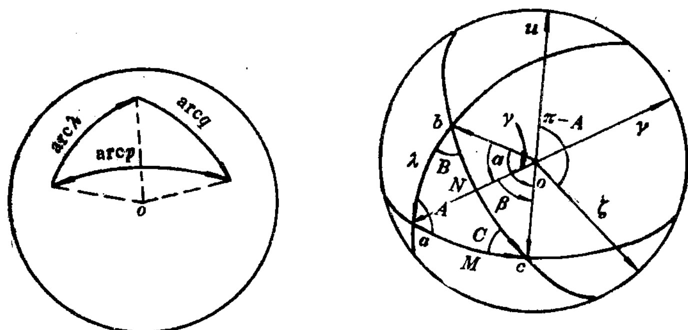


图 1.5 单位四元数的球面表示　图 1.6 球面三角形的四元数表示法

例 正弦定理和余弦定理的推导

如图1.6，球面三角形abc其三边所对应的四元数为

$$\begin{cases}\lambda=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}^{-1}=\cos\alpha+\zeta\sin\alpha\\ M=\boldsymbol{c}*\boldsymbol{a}^{-1}=\cos\beta+\mu\sin\beta\\ N=\boldsymbol{c}*\boldsymbol{b}^{-1}=\cos\gamma+\nu\sin\gamma\end{cases} \tag{1.59}$$

式中α、β、γ为矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$之间的夹角，分别对应于四元数λ、M、N的弧长，因

$$\mathrm{arc}\lambda+\mathrm{arc}M=\mathrm{arc}(M*\lambda)=\mathrm{arc}N$$

故
$$(\cos\beta+\mu\sin\beta)*(\cos\alpha+\zeta\sin\alpha)$$
$$=\cos\gamma+\nu\sin\gamma \tag{1.60}$$

即 $\cos\beta\cos\alpha-(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\zeta})\sin\beta\sin\alpha+\boldsymbol{\mu}\sin\beta\cos\alpha$

$$+\boldsymbol{\zeta}\cos\beta\sin\alpha+(\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\zeta})\sin\beta\sin\alpha=\cos\gamma+\boldsymbol{\gamma}\sin\gamma \tag{1.61}$$

设由矢量$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\zeta}$所夹的角为$(\pi-A)$，则球面三角形$\boldsymbol{a}$点的顶角为A.

$$\boldsymbol{\mu}*\boldsymbol{\zeta}=-(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\zeta})+(\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\zeta})$$
$$=-\cos(\pi-A)-\boldsymbol{a}\sin(\pi-A)$$

故 $\boldsymbol{\mu}*\boldsymbol{\zeta}=\cos A-\boldsymbol{a}\sin A$

代入(1.61)式，则得

$$\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha\cos A=\cos\gamma \text{（余弦定理）} \tag{1.62}$$

$$\boldsymbol{\mu}\sin\beta\cos\alpha+\boldsymbol{\zeta}\sin\alpha\cos\beta-\boldsymbol{a}\sin A\sin\beta\sin\alpha=\boldsymbol{\gamma}\sin\gamma \tag{1.63}$$

以$\boldsymbol{a}$点乘(1.63)式两边，因

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\zeta}=0$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=1$$

故 $-\sin A\sin\beta\sin\alpha=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}\sin\gamma=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

即
$$\frac{\sin A}{\sin\gamma}=\frac{-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} \tag{1.64}$$

当矢量和角循环置换时，(1.64)式右边乘积不变，故得正弦定理

$$\frac{\sin A}{\sin\gamma}=\frac{\sin B}{\sin\beta}=\frac{\sin C}{\sin\alpha} \tag{1.65}$$

§4 用四元数旋转变换表示空间定点旋转

首先研究矢量在空间绕定点的旋转。

由欧拉定理知：空间绕定点旋转，在瞬间必须是绕一欧拉轴旋转一角，如图1.7所示，图中矢量$\boldsymbol{r}$绕定点o旋转至$\boldsymbol{r}'$，设$\boldsymbol{E}$为矢量$\boldsymbol{r}$绕定点o旋转的瞬时欧拉轴，其转角为α，α在

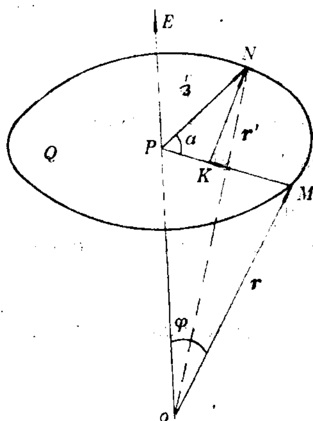


图 1.7　定点旋转的四元数表示法

垂直于$\boldsymbol{E}$轴的平面Q上，p为$\boldsymbol{E}$轴在Q平面上的交点，图中$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{ON}=\boldsymbol{r}'$．作

$$\boldsymbol{KN}\perp\boldsymbol{MP}$$

则
$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{ON}=\boldsymbol{OM}+\boldsymbol{MK}+\boldsymbol{KN} \tag{1.66}$$

而
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{MK}|&=|\boldsymbol{MP}|-|\boldsymbol{KP}|\\&=|\boldsymbol{MP}|-|\boldsymbol{NP}|\cos\alpha\\&=|\boldsymbol{MP}|(1-\cos\alpha)\end{aligned}$$

则
$$\begin{aligned}\boldsymbol{MK}&=(1-\cos\alpha)\boldsymbol{MP}\\&=(1-\cos\alpha)(\boldsymbol{OP}-\boldsymbol{OM})\end{aligned} \tag{1.67}$$

$$\boldsymbol{OP}=\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\right)\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|^2} \tag{1.68}$$

$\boldsymbol{KN}$矢量的方向与$(\boldsymbol{OP}\times\boldsymbol{OM})$方向相同，其长度

$$|\boldsymbol{KN}|=|\boldsymbol{MP}|\sin\alpha=|\boldsymbol{r}|\sin\varphi\sin\alpha$$

故
$$\boldsymbol{KN}=\left(\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\times\boldsymbol{r}\right)\sin\alpha \tag{1.69}$$

将其代入(1.66)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'&=\boldsymbol{r}+(1-\cos\alpha)\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|^2}-\boldsymbol{r}\right]\\&\quad+\left(\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\times\boldsymbol{r}\right)\sin\alpha\\&=\boldsymbol{r}\cos\alpha+(1-\cos\alpha)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|^2}\\&\quad+\left(\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\times\boldsymbol{r}\right)\sin\alpha\end{aligned} \tag{1.70}$$

其次，根据矢量$\boldsymbol{r}$定义一四元数

$$R=r_0+\boldsymbol{r} \tag{1.71}$$

这里　$r_0=|\boldsymbol{r}|$

再根据矢量E和角α定义一四元数

$$q=|\boldsymbol{E}|\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\sin\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1.72}$$

研究四元数变换

$$q*R*q^{-1}=R' \tag{1.73}$$

$$\begin{aligned}q*R*q^{-1}&=|\boldsymbol{E}|\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\sin\frac{\alpha}{2}\right)*(r_0+\boldsymbol{r})\\&\quad*\left[|\boldsymbol{E}|\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{|\boldsymbol{E}|^2}\right]\end{aligned}$$

$$=r_0+\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{E}{|E|}\sin\frac{\alpha}{2}\right)*r$$

$$*\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{E}{|E|}\sin\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1.74}$$

令

$$r'=\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{E}{|E|}\sin\frac{\alpha}{2}\right)*r*\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{E}{|E|}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\left\{\left[-\left(\frac{E}{|E|}\cdot r\right)\sin\frac{\alpha}{2}\right]+\left[r\cos\frac{\alpha}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{E}{|E|}\times r\right)\sin\frac{\alpha}{2}\right]\right\}*\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{E}{|E|}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\left\{-\left(\frac{E}{|E|}\cdot r\right)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right.$$

$$+\left(r\cdot\frac{E}{|E|}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\left.+\left[\left(\frac{E}{|E|}\times r\right)\cdot\frac{E}{|E|}\right]\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$+\left\{r\cos^2\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{E}{|E|}\times r\right)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right.$$

$$+\left(\frac{E}{|E|}\cdot r\right)\frac{E}{|E|}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\left(r\times\frac{E}{|E|}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\left.-\left[\left(\frac{E}{|E|}\times r\right)\times\frac{E}{|E|}\right]\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{r}\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\left(\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\times\boldsymbol{r}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\
&\quad + \left(\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\cdot\boldsymbol{r}\right)\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\sin^2\frac{\alpha}{2} - \boldsymbol{r}\sin^2\frac{\alpha}{2} \\
&\quad + \left(\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\cdot\boldsymbol{r}\right)\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\sin^2\frac{\alpha}{2} \\
&= \boldsymbol{r}\cos\alpha + (1-\cos\alpha)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|^2} \\
&\quad + \left(\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\times\boldsymbol{r}\right)\sin\alpha
\end{aligned}
\tag{1.75}
$$

比较(1.70)和(1.75)式，两者是完全相同的，故得定理如下。

定理 设 q 和 R 为非标量四元数，如果令

$$
q = |\boldsymbol{E}|\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\sin\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1.76}
$$

则
$$
R' = q * R * q^{-1} \tag{1.77}
$$

是四元数，其范数和标量与四元数 R 相同，其矢量部分VectR'为Vect$R$绕欧拉轴$\boldsymbol{E}$旋转 α 角。

因此，绕定点矢量旋转可以用四元数变换来表示，(1.77)式的变换称为旋转变换。

如果令

$$
R = r_0 + \boldsymbol{r} = r_0 + r_1\mathrm{i} + r_2\mathrm{j} + r_3\mathrm{k} \tag{1.78}
$$

$$
R' = r_0' + \boldsymbol{r}' = r_0' + r_1'\mathrm{i} + r_2'\mathrm{j} + r_3'\mathrm{k} \tag{1.79}
$$

$$
q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k} \tag{1.80}
$$

利用旋转变换(1.77)式，可得 R 和R'各分量之间的关系。

$$\begin{cases} r_0' = r_0 \\ r_1' = \dfrac{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}{\|q\|} r_1 + \dfrac{2(q_1 q_2 - q_0 q_3)}{\|q\|} r_2 \\ \qquad + \dfrac{2(q_1 q_3 + q_0 q_2)}{\|q\|} r_3 \\ r_2' = \dfrac{2(q_1 q_2 + q_0 q_3)}{\|q\|} r_1 + \dfrac{q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2}{\|q\|} r_2 \\ \qquad + \dfrac{2(q_2 q_3 - q_0 q_1)}{\|q\|} r_3 \\ r_3' = \dfrac{2(q_1 q_3 - q_0 q_2)}{\|q\|} r_1 + \dfrac{2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}{\|q\|} r_2 \\ \qquad + \dfrac{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}{\|q\|} r_3 \end{cases} \tag{1.81}$$

当旋转变换四元数 q 是规范四元数时，$\|q\|=1$，则可以用共轭四元数来代替逆四元数。此时

$$R' = q * R * q^* \tag{1.82}$$

$$q = \cos\frac{\alpha}{2} + \zeta \sin\frac{\alpha}{2} \tag{1.83}$$

$$q^* = \cos\frac{\alpha}{2} - \zeta \sin\frac{\alpha}{2} \tag{1.84}$$

则两矢量$\boldsymbol{r}'$和$\boldsymbol{r}$的各分量之间的关系可以用矩阵形式来表示

$$\begin{bmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2, & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3), & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3), & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2, & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2), & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1), & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \tag{1.85}$$

形式$q*(\quad)*q^*$称为旋转算子。它确定角为α的旋转。

如果将q换为$-q$，因$(-q)^*=-q^*$，故旋转算子$(-q)*(\quad)*(-q)^*$和$q*(\quad)*q^*$给出相同结果，实际上，因

$$-q=\cos\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+(-\zeta)\sin\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1.86}$$

表示绕$-\zeta$轴旋转$(2\pi-\alpha)$，故结果相同，

因　$q^**q*(\quad)*q^**q=1*(\quad)*1$，故旋转算子$q^**(\quad)*q$给出角度为$\alpha$的反向旋转。因为

$$q^*=\cos\frac{\alpha}{2}-\zeta\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+\zeta\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1.87}$$

如果规范四元数q给出以角度α绕轴ζ的旋转，而规范四元数p给出以角度β绕轴μ的旋转，则顺序旋转q和p相应于算子

$$p*q*(\quad)*q^**p^*=(p*q)*(\quad)*(p*q)^* \tag{1.88}$$

因为$p*q$也是规范四元数，如令

$$p*q=\cos\frac{\psi}{2}+\gamma\sin\frac{\psi}{2} \tag{1.89}$$

则两次顺序旋转的结果，用以角度ψ绕轴γ的一次旋转是等价的，更一般的情况是：顺序旋转$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$和一次旋转$(\lambda_n*\lambda_{n-1}*\cdots*\lambda_1)$是等价的。

研究一种特殊旋转作为例子。

设　$q=\zeta$，　即　$q=\cos\frac{\pi}{2}+\zeta\sin\frac{\pi}{2}$，则转角为$\pi$．且$q^*=\cos\frac{\pi}{2}-\zeta\sin\frac{\pi}{2}=-\zeta=-q$，故

$$r' = q*r*q^* = -\zeta*r*\zeta$$

如图1.8所示，变换$-\zeta*r*\zeta$可给出相对于ζ轴对称的矢量，而变换$\zeta*(\quad)*\zeta$可以给出同矢量$-\zeta*(\quad)*\zeta$相反的矢量，故变换$\zeta*(\quad)*\zeta$给出原矢量的镜反射。

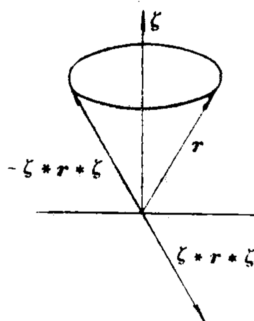


图 1.8　用四元数变换表示镜反射

两次变换ζ和μ决定的顺序镜反射

$$\mu*\zeta*(\quad)*\zeta*\mu$$
$$=(\mu*\zeta)*(\quad)*(\mu*\zeta)^{-1}$$

因　$\mu*\zeta = -(\mu\cdot\zeta)-(\zeta\times\mu) = -(\cos\varphi + b\sin\varphi)$，$\varphi$是$\zeta$与$\mu$的交角。故两次镜反射等价于绕该两平面交线，以两平面间交角的2倍旋转的结果。

§5　用四元数变换来表示坐标变换

研究具有单位矢量e_1、e_2、e_3的直角坐标系E和以单位矢量i_1、i_2、i_3为轴的坐标系I之间的坐标变换。

如图1.9，设坐标系I中某一不变矢量

$$r = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3$$

如果将坐标系I转到坐标系E，此时矢量r随坐标系一起旋转成r'，它在原坐标系I中的分量为

$$r' = r_1' i_1 + r_2' i_2 + r_3' i_3 \tag{1.90}$$

则r_1'、r_2'、r_3'与r_1、r_2、r_3之间的关系由(1.85)式确定。

如果规范四元数q为旋转四元数，则由(1.85)式两边转置可得

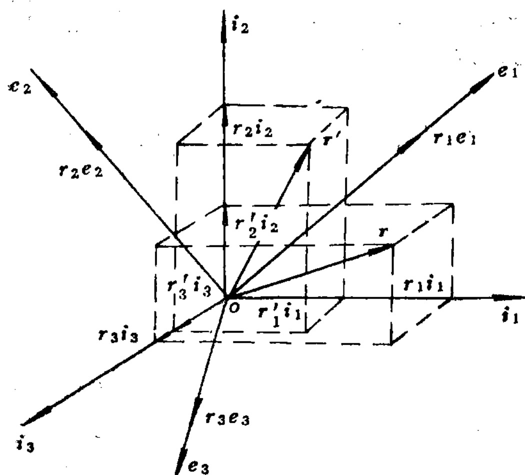


图 1.9 坐标系E，I关系示意图

$$[r_1', r_2', r_3'] = [r_1, r_2, r_3] \cdot \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2, & 2(q_1q_2+q_0q_3), & 2(q_1q_3-q_0q_2) \\ 2(q_1q_2-q_0q_3), & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2, & 2(q_2q_3+q_0q_1) \\ 2(q_1q_3+q_0q_2), & 2(q_2q_3-q_0q_1), & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \tag{1.91}$$

即

$$[r_1', r_2', r_3'] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = [r_1, r_2, r_3] \cdot \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2, & 2(q_1q_2+q_0q_3), & 2(q_1q_3-q_0q_2) \\ 2(q_1q_2-q_0q_3), & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2, & 2(q_2q_3+q_0q_1) \\ 2(q_1q_3+q_0q_2), & 2(q_2q_3-q_0q_1), & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \tag{1.92}$$

因为$\boldsymbol{r}$是不变矢量，随坐标系I转成$\boldsymbol{r}'$，则$\boldsymbol{r}'$对坐标系E的分量与$\boldsymbol{r}$对坐标系I的分量相同，即

$$\boldsymbol{r}'=[r_1', r_2', r_3']\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=[r_1, r_2, r_3]\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{1.93}$$

与(1.92)式比较，则

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2, & 2(q_1q_2+q_0q_3), & 2(q_1q_3-q_0q_2) \\ 2(q_1q_2-q_0q_3), & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2, & 2(q_2q_3+q_0q_1) \\ 2(q_1q_3+q_0q_2), & 2(q_2q_3-q_0q_1), & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=B\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \tag{1.94}$$

(1.94)式表示坐标系E与坐标系I之间的关系。通过四元数q写出了他们之间的方向余弦阵。它表示两坐标系单位矢量之间的关系，即坐标变换。如果用R_E表示联系于坐标系E的四元数，R_I表示联系于坐标系I的四元数，则坐标变换可以用如下的四元数形式表示之。

$$R_E=q^* * R_I * q \tag{1.95}$$

而(1.85)式则是表示对同一坐标系，不变矢量旋转后，其分量之间的关系。可以看出两变换矩阵是互为转置的。

坐标变换矩阵B是正交矩阵，其$\det B=1$. 由欧拉定理知矩阵B确定的变换使一轴保持不变，此轴即欧拉轴，它是矩阵B对于特征值为1的特征矢量。设特征矢量为$\boldsymbol{E}$，特征值为λ，则

$$\boldsymbol{BE}=\lambda \boldsymbol{IE}$$

$$(B-\lambda I)\boldsymbol{E}=0 \tag{1.96}$$

此方程的标量形式为

$$\begin{cases}(b_{11}-\lambda)E_1+b_{12}E_2+b_{13}E_3=0\\ b_{21}E_1+(b_{22}-\lambda)E_2+b_{23}E_3=0\\ b_{31}E_1+b_{32}E_2+(b_{33}-\lambda)E_3=0\end{cases} \tag{1.97}$$

欧拉轴对应于 $\lambda=1$，解(1.97)式，即可确定欧拉轴，准确到任一因子。

如果考虑到变换四元数

$$q=|\boldsymbol{E}|\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{E}|}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

如果令 $|\boldsymbol{E}|=1$，则

$$q=\cos\frac{\alpha}{2}+\boldsymbol{E}\sin\frac{\alpha}{2}=q_0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k} \tag{1.98}$$

矢量 $\boldsymbol{E}$ 即是欧拉轴方向的单位矢量，设在所研究的坐标系上（例如坐标系 I）的分量为 E_1、E_2、E_3，则

$$q_0=\cos\frac{\alpha}{2},\ q_1=E_1\sin\frac{\alpha}{2},\ q_2=E_2\sin\frac{\alpha}{2},\ q_3=E_3\sin\frac{\alpha}{2} \tag{1.99}$$

代入(1.94)式，可得：

$$E_1=\frac{b_{23}-b_{32}}{2\sin\alpha},\ E_2=\frac{b_{31}-b_{13}}{2\sin\alpha},\ E_3=\frac{b_{12}-b_{21}}{2\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}(b_{11}+b_{22}+b_{33}-1)$$

则

$$\left\{\begin{aligned} E_1&=\frac{b_{23}-b_{32}}{\sqrt{4-(1-b_{11}-b_{22}-b_{33})^2}}\\ E_2&=\frac{b_{31}-b_{13}}{\sqrt{4-(1-b_{11}-b_{22}-b_{33})^2}}\\ E_3&=\frac{b_{12}-b_{21}}{\sqrt{4-(1-b_{11}-b_{22}-b_{33})^2}} \end{aligned}\right. \tag{1.100}$$

由 (1.99) 式 所确定的 四元数 分量，称为 罗得里格-哈密顿参数。

§6 转动的相加和连续的坐标变换

上一节研究了矢量旋转和坐标系变换的四元数表示法。本节进一步研究连续的矢量旋转和连续的坐标变换的运算方法。

我们已经知道，矩阵的乘法对应于转动相加，如果第一次转动将矢量$\boldsymbol{r}$转成$\boldsymbol{r}'$，由矩阵A给定

$$\boldsymbol{r}'=A\boldsymbol{r} \tag{1.101}$$

其四元数表示为

$$\boldsymbol{r}'=q*\boldsymbol{r}*q^* \tag{1.102}$$

式中
$$q=\cos\frac{\alpha_1}{2}+\zeta_1\sin\frac{\alpha_1}{2} \tag{1.103}$$

第二次转动将矢量$\boldsymbol{r}'$转成$\boldsymbol{r}''$，由矩阵B给定

$$\boldsymbol{r}''=B\boldsymbol{r}'=BA\boldsymbol{r}=C\boldsymbol{r} \tag{1.104}$$

其四元数表示为

$$\boldsymbol{r}''=p*\boldsymbol{r}'*p^*=p*q*\boldsymbol{r}*(p*q)^*=\lambda*\boldsymbol{r}*\lambda^* \tag{1.105}$$

式中

$$p=\cos\frac{\alpha_2}{2}+\zeta_2\sin\frac{\alpha_2}{2} \tag{1.106}$$

$$\lambda=\cos\frac{\alpha_{12}}{2}+\zeta_{12}\sin\frac{\alpha_{12}}{2} \tag{1.107}$$

由四元数乘法规则，有

$$\lambda=p*q=\begin{bmatrix}\lambda_0\\\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_0, & -p_1, & -p_2, & -p_3\\p_1, & p_0, & -p_3, & p_2\\p_2, & p_3, & p_0, & -p_1\\p_3, & -p_2, & p_1, & p_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0\\q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}q_0, & -q_1, & -q_2, & -q_3\\q_1, & q_0, & q_3, & -q_2\\q_2, & -q_3, & q_0, & q_1\\q_3, & q_2, & -q_1, & q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix} \tag{1.108}$$

其次研究连续的坐标变换。与矢量转动相类似，设矢量 $\boldsymbol{r}_A$ 联系于坐标系 A，即

$$R_A=r_1i_{1A}+r_2i_{2A}+r_3i_{3A} \tag{1.109}$$

将坐标系 A 转至坐标系 B，且令

$$R_B=r_1i_{1B}+r_2i_{2B}+r_3i_{3B} \tag{1.110}$$

则

$$R_B=q^**R_A*q \tag{1.111}$$

q 为把坐标系 A 转成坐标系 B 的四元数。

如果再将坐标系 B 转至坐标系 C 的四元数为 p，且令

$$R_C=r_1i_{1C}+r_2i_{2C}+r_3i_{3C} \tag{1.112}$$

则

$$\begin{aligned}R_C&=p^**R_B*p=p^**q^**R_A*q*p\\&=(q*p)^**R_A*(q*p)\end{aligned} \tag{1.113}$$

如果设将坐标系 A 转至坐标系 C 的四元数为 λ，则

$$R_C=\lambda^**R_A*\lambda \tag{1.114}$$

$$\lambda=q*p=\begin{bmatrix}q_0, & -q_1, & -q_2, & -q_3\\q_1, & q_0, & -q_3, & q_2\\q_2, & q_3, & q_0, & -q_1\\q_3, & -q_2, & q_1, & q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} p_0, & -p_1, & -p_2, & -p_3 \\ p_1, & p_0, & p_3, & -p_2 \\ p_2, & -p_3, & p_0, & p_1 \\ p_3, & p_2, & -p_1, & p_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (1.115)
$$

比较(1.108)和(1.115)式，可以看出矢量旋转和坐标变换的区别在于四元数乘积因子互相交换，而从矩阵表示的形式上来看，该矩阵互为转置。

如果引入符号

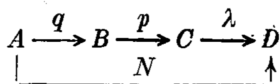
$$
[M(q)]=\begin{bmatrix} q_0, & -q_1, & -q_2, & -q_3 \\ q_1, & q_0, & -q_3, & q_2 \\ q_2, & q_3, & q_0, & -q_1 \\ q_3, & -q_2, & q_1, & q_0 \end{bmatrix};
$$

$$
[M^*(q)]=\begin{bmatrix} q_0, & -q_1, & -q_2, & -q_3 \\ q_1, & q_0, & q_3, & -q_2 \\ q_2, & -q_3, & q_0, & q_1 \\ q_3, & q_2, & -q_1, & q_0 \end{bmatrix}
$$

$$
Q_{BA}=\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix};\quad Q_{CB}=\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix};\quad Q_{CA}=\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (1.116)
$$

则 $Q_{CA}=[M^*_{CB}(p)]Q_{BA}=[M_{BA}(q)]Q_{CB}$ (1.117)

如果有四个坐标系如下：



则

$$
\begin{aligned} Q_{DA} &= [M^*_{DC}(\lambda)][M^*_{CB}(p)]Q_{BA}(q) \\ &= [M^*_{DC}(\lambda)][M_{BA}(q)]Q_{CB}(p) \\ &= [M_{BA}(q)][M^*_{DC}(\lambda)]Q_{CB}(p) \end{aligned} \quad (1.118)
$$

故 $$[M_{DC}^{*}(\lambda)][M_{BA}(q)]=[M_{BA}(q)][M_{DC}^{*}(\lambda)] \tag{1.119}$$

利用上面所述的连续坐标变换公式，可以建立变换四元数与欧拉角之间的关系。

如图 1.10，设坐标系 $ox_0y_0z_0$ 通过 φ、ψ、γ 转到坐标系

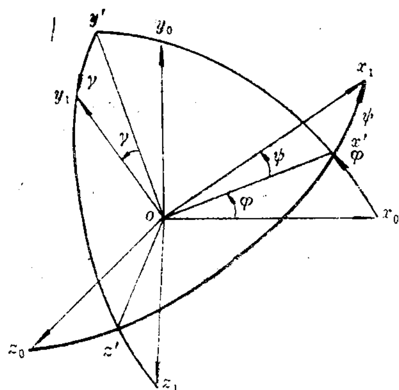


图 1.10 体坐标系与惯性坐标系关系示意图

$ox_1y_1z_1$，其转换次序如下：

$$\underset{(A)}{ox_0y_0z_0}\xrightarrow[\varphi]{\Phi}\underset{(B)}{ox'y'z_0}\xrightarrow[\psi]{\Psi}\underset{(C)}{ox_1y'z'}\xrightarrow[\gamma]{\Gamma}\underset{(D)}{ox_1y_1z_1}$$

$$(A)\xrightarrow{\quad N \quad}(D)$$

其对应的四元数为Φ、Ψ、Γ，则

$$\Phi=\cos\frac{\varphi}{2}+i_{3A}\sin\frac{\varphi}{2},\quad Q_{BA}^{T}=\left(\cos\frac{\varphi}{2},0,0,\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\Psi=\cos\frac{\psi}{2}+i_{2B}\sin\frac{\psi}{2},\quad Q_{CB}^{T}=\left(\cos\frac{\psi}{2},0,\sin\frac{\psi}{2},0\right)$$

$$\Gamma=\cos\frac{\gamma}{2}+i_{1C}\sin\frac{\gamma}{2},\quad Q_{DC}^{T}=\left(\cos\frac{\gamma}{2},\ \sin\frac{\gamma}{2},0,0\right)$$

$$Q_{DA}^{T}(N)=(N_0,N_1,N_2,N_3)$$

因 $N=\Phi*\Psi*\Gamma$

$$\begin{bmatrix}N_0\\N_1\\N_2\\N_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\gamma}{2}, & -\sin\frac{\gamma}{2}, & 0, & 0\\ \sin\frac{\gamma}{2}, & \cos\frac{\gamma}{2}, & 0, & 0\\ 0, & 0, & \cos\frac{\gamma}{2}, & \sin\frac{\gamma}{2}\\ 0, & 0, & -\sin\frac{\gamma}{2}, & \cos\frac{\gamma}{2}\end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\cos\frac{\psi}{2}, & 0, & -\sin\frac{\psi}{2}, & 0\\ 0, & \cos\frac{\psi}{2}, & 0, & -\sin\frac{\psi}{2}\\ \sin\frac{\psi}{2}, & 0, & \cos\frac{\psi}{2}, & 0\\ 0, & \sin\frac{\psi}{2}, & 0, & \cos\frac{\psi}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\varphi}{2}\\0\\0\\\sin\frac{\varphi}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\\ \cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\\ -\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\end{bmatrix}\tag{1.120}$$

反过来，亦可以用四元数 N_0, N_1, N_2, N_3 来表示欧拉角 φ，ψ，γ. 已知

$$\begin{bmatrix} N_0^2+N_1^2-N_2^2-N_3^2, & 2(N_1N_2+N_0N_3), & 2(N_1N_3-N_0N_2) \\ 2(N_1N_2-N_0N_3), & N_0^2-N_1^2+N_2^2-N_3^2, & 2(N_2N_3+N_0N_1) \\ 2(N_1N_3+N_0N_2), & 2(N_2N_3-N_0N_1), & N_0^2-N_1^2-N_2^2+N_3^2 \end{bmatrix}$$

$= B$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi, & \cos\psi\sin\varphi, & -\sin\psi \\ \sin\gamma\sin\psi\cos\varphi - \cos\gamma\sin\varphi, & \sin\gamma\sin\psi\sin\varphi + \cos\gamma\cos\varphi, & \sin\gamma\cos\psi \\ \cos\gamma\sin\psi\cos\varphi + \sin\gamma\sin\varphi, & \cos\gamma\sin\psi\sin\varphi - \sin\gamma\cos\varphi, & \cos\gamma\cos\psi \end{bmatrix} = B$$

故

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{2(N_1N_2+N_0N_3)}{N_0^2+N_1^2-N_2^2-N_3^2} \\ \sin\psi = 2(N_0N_2-N_1N_3) \\ \mathrm{tg}\gamma = \dfrac{2(N_0N_1+N_2N_3)}{N_0^2-N_1^2-N_2^2+N_3^2} \\ N_0^2+N_1^2+N_2^2+N_3^2 = 1 \end{cases} \tag{1.121}$$

第二章　四元数微分方程的建立

§1　引　言

在利用欧拉角来确定刚体在空间的姿态时，需要建立刚体旋转角速度与欧拉角导数之间的关系式以建立欧拉方程。当刚体对参考坐标系旋转角速度已知时，通过解欧拉方程，即可求出任一瞬间的欧拉角，确定刚体瞬时在空间的姿态。如第一章第一节所述，由于欧拉方程为非线性方程，且当大姿态角时$\left(\text{例如}\ \psi=\dfrac{\pi}{2}\right)$，方程是奇异的。为此我们想用四元数来代替欧拉角。

上一章已经研究了四元数的基本性质及两坐标系坐标变换的四元数表示法，并给出了四元数和欧拉角之间的关系。为了能用四元数来研究刚体的姿态变化，需要建立刚体旋转角速度与四元数导数之间的关系以建立四元数方程。因此要引入无穷小变换的概念。

设旋转变换四元数为 λ，则 λ 有两种变换形式，将矢量 $\boldsymbol{r}$ 转换成矢量 $\boldsymbol{r}'$ 和将坐标系 E 转换成坐标系 E'，以下分别来叙述。

(1) 将矢量$\boldsymbol{r}$转换成矢量$\boldsymbol{r}'$

设将矢量$\boldsymbol{r}$转换成矢量 $\boldsymbol{r}'$时，两者的位置相差一个微量的无穷小变换，它对应于一个无穷小角度 $\Delta\alpha$ 的四元数，设其所对应的无穷小变换四元数为$\Delta\lambda$，则

$$\Delta\lambda=\cos\frac{\Delta\alpha}{2}+\zeta\sin\frac{\Delta\alpha}{2}=1+\zeta\frac{\Delta\alpha}{2}+O(\Delta\alpha) \tag{2.1}$$

式中ζ为瞬时旋转轴，$\Delta\alpha$为旋转角，$O(\Delta\alpha)$为二阶以上无穷小量，则对应于矢量旋转的四元数旋转算子形式为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'&=\Delta\lambda*\boldsymbol{r}*\Delta\lambda^*=\left(1+\zeta\frac{\Delta\alpha}{2}\right)*\boldsymbol{r}*\left(1-\zeta\frac{\Delta\alpha}{2}\right)+O(\Delta\alpha)\\
&=\left(\boldsymbol{r}+\zeta\frac{\Delta\alpha}{2}*\boldsymbol{r}\right)*\left(1-\zeta\frac{\Delta\alpha}{2}\right)+O(\Delta\alpha)\\
&=\boldsymbol{r}+\zeta*\boldsymbol{r}\frac{\Delta\alpha}{2}-\boldsymbol{r}*\zeta\frac{\Delta\alpha}{2}-\zeta*\boldsymbol{r}*\zeta\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)^2+O(\Delta\alpha)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

如果略去二阶微量项，则得下列矢量增量

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}=\zeta*\boldsymbol{r}\frac{\Delta\alpha}{2}-\boldsymbol{r}*\zeta\frac{\Delta\alpha}{2}=(\zeta\Delta\alpha)\times\boldsymbol{r} \tag{2.3}$$

(2.3)式两边同除以Δt，并取极限，则

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left(\zeta\frac{d\alpha}{dt}\right)\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{2.4}$$

$\zeta(d\alpha/dt)$表示将$\boldsymbol{r}$转成$\boldsymbol{r}'$的瞬时旋转角速度矢量$\boldsymbol{\omega}$. 而(2.1)式可写成

$$\Delta\lambda=1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\Delta t$$

即

$$d\lambda=1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}dt \tag{2.5}$$

(2.4)式与矢量微分公式相同。

(2) 将坐标系E转换成坐标系E'

两坐标系转换可以用转换矩阵B来表示，设坐标系作一个无穷小变换，则

$$B=I+\in \tag{2.6}$$

式中$\in$为一无穷小算子。

如果设联系于坐标系E的四元数为R_E，联系于坐标系E'的四元数为$R_{E'}$，则经过无穷小变换后

$$R_{E'}=(I+\in)R_E=R_E+\in R_E \tag{2.7}$$

故
$$\Delta R_E=R_{E'}-R_E=\in R_E \tag{2.8}$$

现在需要确定无穷小增量算子$\in$与旋转角速度ω之间的关系。

在略去二阶微量情况下，转换矩阵B的逆矩阵可近似写成

$$B^{-1}=I-\in \tag{2.9}$$

$$BB^{-1}=(I+\in)(I-\in)\approx I \tag{2.10}$$

对正交矩阵来说，其转置矩阵等于其逆矩阵，

则
$$B^T=I+\in^T=I-\in \tag{2.11}$$

故
$$\in^T=-\in \tag{2.12}$$

即
$$\in_{ij}=-\in_{ji} \tag{2.13}$$

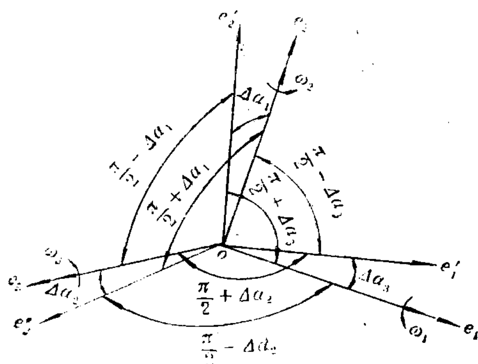


图 2.1　无穷小变换示意图

故知无穷小变换矩阵是反对称矩阵，$\in$具有如下形式：

$$\in=\begin{bmatrix}0 & \in_{12} & \in_{13}\\ \in_{21} & 0 & \in_{23}\\ \in_{31} & \in_{32} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \in_{12} & \in_{13}\\ -\in_{12} & 0 & \in_{23}\\ -\in_{13} & -\in_{23} & 0\end{bmatrix}\tag{2.14}$$

如图2.1，设无穷小增量算子$\in$，将坐标系 $E(e_1, e_2, e_3)$ 转换到 $E'(e'_1, e'_2, e'_3)$，则$\in$可以用方向余弦表示之，因

$$B=\begin{bmatrix}e'_1\cdot e_1 & e'_1\cdot e_2 & e'_1\cdot e_3\\ e'_2\cdot e_1 & e'_2\cdot e_2 & e'_2\cdot e_3\\ e'_3\cdot e_1 & e'_3\cdot e_2 & e'_3\cdot e_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\Delta\alpha_3, & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\Delta\alpha_3\right), & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\Delta\alpha_2\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\Delta\alpha_3\right), & \cos\Delta\alpha_1, & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\Delta\alpha_1\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\Delta\alpha_2\right), & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\Delta\alpha_1\right), & \cos\Delta\alpha_2\end{bmatrix}$$

$$=I+\begin{bmatrix}0 & \Delta\alpha_3 & -\Delta\alpha_2\\ -\Delta\alpha_3 & 0 & \Delta\alpha_1\\ \Delta\alpha_2 & -\Delta\alpha_1 & 0\end{bmatrix}=I+\in\tag{2.15}$$

故

$$\in=\begin{bmatrix}0 & \Delta\alpha_3 & -\Delta\alpha_2\\ -\Delta\alpha_3 & 0 & \Delta\alpha_1\\ \Delta\alpha_2 & -\Delta\alpha_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \frac{\Delta\alpha_3}{\Delta t} & -\frac{\Delta\alpha_2}{\Delta t}\\ -\frac{\Delta\alpha_3}{\Delta t} & 0 & \frac{\Delta\alpha_1}{\Delta t}\\ \frac{\Delta\alpha_2}{\Delta t} & -\frac{\Delta\alpha_1}{\Delta t} & 0\end{bmatrix}\Delta t$$

当$\Delta t \to 0$时，取极限，用角速度ω_i来表示$\frac{d\alpha_i}{dt}(i=1,2,3)$，则

$$\in=\begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} dt=\Omega\, dt \tag{2.16}$$

代入(2.8)式，取极限，则

$$dR_E=\in R_E=\Omega R_E dt=\begin{bmatrix} \omega_3 r_{2E}-\omega_2 r_{3E} \\ \omega_1 r_{3E}-\omega_3 r_{1E} \\ \omega_2 r_{1E}-\omega_1 r_{2E} \end{bmatrix} dt=\mathbf{R}_E \times \boldsymbol{\omega}_E dt \tag{2.17}$$

故
$$\frac{d\mathbf{R}_E}{dt}=-\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{R}_E \tag{2.18}$$

比较(2.4)和(2.18)式可以看出，联系于坐标系的四元数矢量，其导数与矢量导数符号相反。

最后来看一下无穷小转动的合成变换。先看极限情况。

$$d\lambda_3=d\lambda_2 * d\lambda_1=\left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2 dt\right)*\left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1 dt\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_2+\boldsymbol{\omega}_1)dt-\frac{1}{4}(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1)(dt)^2+$$

$$+\frac{1}{4}(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1)(dt)^2$$

在略去二阶微量情况下

$$d\lambda_3=1+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_2+\boldsymbol{\omega}_1)dt \tag{2.19}$$

故在准确到二阶无穷小的情况下，诸无穷小转动对应于其角速度相加，这里转动的次序即乘法顺序不起作用。这说明矢量$\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$在无穷小转动相邻坐标系上，准确到二阶无穷小量的

投影是相同的。

其次看微量转动。由(2.1)式

$$\Delta\lambda_3=\Delta\lambda_2*\Delta\lambda_1=\left[1+\frac{1}{2}\zeta_2\Delta\alpha_2+O(\Delta\alpha_2)\right]$$

$$*\left[1+\frac{1}{2}\zeta_1\Delta\alpha_1+O(\Delta\alpha_1)\right]$$

$$=1+\frac{1}{2}(\zeta_2\Delta\alpha_2+\zeta_1\Delta\alpha_1)+O(\Delta\alpha_1,\ \Delta\alpha_2)$$

$$=1+\frac{1}{2}\theta_1+\frac{1}{2}\theta_2 \tag{2.20}$$

式中　$\theta_1=\zeta_1\Delta\alpha_1$，$\theta_2=\zeta_2\Delta\alpha_2$

可以看出，在略去二阶微量时，与无穷小转动相似。

§2　四元数方程的建立

首先研究动坐标系E对固定坐标系（惯性坐标系）I的四元数方程。

设R_I为联系于坐标系I的四元数，R_E为联系于坐标系E的四元数，将固定坐标系I转换到坐标系E的旋转四元数为q，由(1.95)式

$$R_E=q^{*}*R_I*q$$

两边微分

$$\frac{dR_E}{dt}=\frac{dq^{*}}{dt}*R_I*q+q^{*}*\frac{dR_I}{dt}*q+q^{*}*R_I*\frac{dq}{dt} \tag{2.21}$$

因I为固定坐标系

$$\frac{dR_I}{dt}=0$$

且知

$$\frac{dR_E}{dt} = -\omega_E \times R_E \tag{2.22}$$

$$R_I * q = q * R_E \tag{2.23}$$

$$q^* * R_I = R_E * q^* \tag{2.24}$$

因 $q^* * q = 1$

故
$$q^* * \frac{dq}{dt} = -\frac{dq^*}{dt} * q \tag{2.25}$$

将以上关系代入(2.21)式，则得：

$$-\omega_E \times R_E = \left(\frac{dq^*}{dt} * q\right) * R_E - R_E * \left(\frac{dq^*}{dt} * q\right)$$

$$= 2\mathrm{Vect}\left(\frac{dq^*}{dt} * q\right) \times \boldsymbol{R}_E = 2\left(\frac{dq^*}{dt} * q\right) \times R_E \tag{2.26}$$

故
$$2\left(\frac{dq^*}{dt} * q\right) = -\omega_E$$

即
$$q^* * \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}\omega_E$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} q * \omega_E \tag{2.27}$$

这就是通过坐标系旋转角速度在E坐标系上投影来表示的四元数方程。

如果将角速度ω投影在坐标系I上，则因

$$\omega_E = q^* * \omega_I * q \tag{2.28}$$

将(2.28)式代入(2.27)式，则得：

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}\omega_I * q \tag{2.29}$$

将(2.27)式和(2.29)式表示成分量形式，则(2.27)式为

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_0\\ \dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0, & -\omega_{1E}, & -\omega_{2E}, & -\omega_{3E}\\ \omega_{1E}, & 0, & \omega_{3E}, & -\omega_{2E}\\ \omega_{2E}, & -\omega_{3E}, & 0, & \omega_{1E}\\ \omega_{3E}, & \omega_{2E}, & -\omega_{1E}, & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix} \tag{2.30}$$

(2.29)式为

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_0\\ \dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0, & -\omega_{1I}, & -\omega_{2I}, & -\omega_{3I}\\ \omega_{1I}, & 0, & -\omega_{3I}, & \omega_{2I}\\ \omega_{2I}, & \omega_{3I}, & 0, & -\omega_{1I}\\ \omega_{3I}, & -\omega_{2I}, & \omega_{1I}, & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix} \tag{2.31}$$

如果利用(1.116)式的表示法，则

$$\dot{q}=\frac{1}{2}[M^*(\omega_E)]Q(q)=\frac{1}{2}[M(q)]Q(\omega_E) \tag{2.32}$$

$$\dot{q}=\frac{1}{2}[M(\omega_I)]Q(q)=\frac{1}{2}[M^*(q)]Q(\omega_I) \tag{2.33}$$

其次研究动坐标系E'对动坐标系E的四元数方程。

设将固定坐标系I转换到动坐标系E的四元数为q，角速度为$\boldsymbol{\omega}$，如图2.2所示。将动坐标系E转换到动坐标系E'的四元数为λ，角速度为$\boldsymbol{\Omega}$. 将固定坐标系I转换到动坐标系E'的四元数为N，角速度为$\boldsymbol{\omega}'$. 则

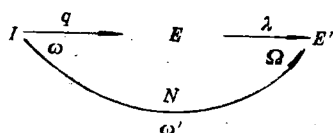


图 2.2 坐标系间的关系示意图

$$q*\lambda=N \tag{2.34}$$

$$\lambda=q^* * N \tag{2.35}$$

微分(2.34)式

$$\dot{q}*\lambda+q*\dot{\lambda}=\dot{N}$$

故 $$\dot{\lambda}=q^* * \dot{N} - q^* * \dot{q} * \lambda$$

因 $$\dot{N}=\frac{1}{2}N * \omega'_{E'}$$

$$\dot{q}=\frac{1}{2}q * \omega_E$$

故 $$\dot{\lambda}=q^* * \frac{1}{2}N * \omega'_{E'} - q^* * \frac{1}{2}q * \omega_E * \lambda$$

$$\dot{\lambda}=\frac{1}{2}\lambda * \omega'_{E'} - \frac{1}{2}\omega_E * \lambda \tag{2.36}$$

如果设ω'在E'坐标系上的分量为$\omega'_{1E'}$、$\omega'_{2E'}$、$\omega'_{3E'}$；ω在E坐标系上的分量为ω_{1E}、ω_{2E}、ω_{3E}。则(2.36)式可写成

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_0\\ \dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \dot{\lambda}_3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}0, & -\omega'_{1E'}, & -\omega'_{2E'}, & -\omega'_{3E'}\\ \omega'_{1E'}, & 0, & \omega'_{3E'}, & -\omega'_{2E'}\\ \omega'_{2E'}, & -\omega'_{3E'}, & 0 & \omega'_{1E'}\\ \omega'_{3E'}, & \omega'_{2E'}, & -\omega'_{1E'}, & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0, & -\omega_{1E}, & -\omega_{2E}, & -\omega_{3E}\\ \omega_{1E}, & 0, & -\omega_{3E}, & \omega_{2E}\\ \omega_{2E}, & \omega_{3E}, & 0, & -\omega_{1E}\\ \omega_{3E}, & -\omega_{2E}, & \omega_{1E}, & 0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} \tag{2.37}$$

如果考虑到

$$\omega'=\omega+\Omega \tag{2.38}$$

将(2.38)式代入(2.36)式，消去ω_E，则

$$\dot{\lambda}=\frac{1}{2}\lambda * \omega'_{E'} - \frac{1}{2}(\omega'_E - \Omega_E) * \lambda$$

式中ω'_E为ω'在E坐标系上的投影；Ω_E为Ω在E坐标系上的投影。

因 $$\omega'_{E'}-\Omega_{E'}=\lambda^{*}*(\omega'_{E}-\Omega_{E})*\lambda \tag{2.39}$$

故 $$\lambda=\frac{1}{2}\lambda*\omega'_{E'}-\frac{1}{2}[\lambda*(\omega_{E'}-\Omega_{E'})*\lambda^{*}]*\lambda$$

故 $$\lambda=\frac{1}{2}\lambda*\Omega_{E'} \tag{2.40}$$

如果消去(2.36)式的$\omega'_{E'}$，则

$$\lambda=\frac{1}{2}\lambda*(\omega_{E'}+\Omega_{E'})-\frac{1}{2}\omega_{E}*\lambda$$

$$=\frac{1}{2}\lambda*[\lambda^{*}*(\omega_{E}+\Omega_{E})*\lambda]-\frac{1}{2}\omega_{E}*\lambda$$

故 $$\lambda=\frac{1}{2}\Omega_{E}*\lambda \tag{2.41}$$

将(2.40)、(2.41)式与(2.27)、(2.29)式进行比较，可以看出形如(2.27)或(2.29)式的四元数方程，它描述一坐标系相对于另一坐标系的运动，不一定限于动坐标系对固定坐标系，如果是两动坐标系，则其角速度矢量为两坐标系相对角速度矢量。

四元数方程(2.27)或(2.29)和欧拉方程(1.5)一样，可以确定刚体在空间的姿态。由四元数方程可以导出欧拉方程。

我们知道刚体绕定点转动总可以分解成为绕三个瞬时欧拉轴的平面运动，而每一平面运动可对应于一个四元数，因此有可能利用四元数之积的形式来解运动方程。

设将坐标系I转换成坐标系E，可用对应于三个平面旋转的四元数λ_1，λ_2，λ_3来表示，则将坐标系I转换成坐标系E的四元数λ可表示为

$$\lambda=\lambda_1*\lambda_2*\lambda_3 \tag{2.42}$$

且设 $$2\lambda_i=\lambda_i*\omega_i \tag{2.43}$$

微分(2.42)式

$$
\begin{aligned}
2\dot{\lambda} &= 2(\dot{\lambda}_1*\lambda_2*\lambda_3+\lambda_1*\dot{\lambda}_2*\lambda_3+\lambda_1*\lambda_2*\dot{\lambda}_3) \\
&= \lambda_1*\omega_1*\lambda_2*\lambda_3+\lambda_1*\lambda_2*\omega_2*\lambda_3+\lambda_1*\lambda_2*\lambda_3*\omega_3 \\
&= \lambda_1*\lambda_2*\lambda_3*\lambda_3^**\lambda_2^**\omega_1*\lambda_2*\lambda_3 \\
&\quad +\lambda_1*\lambda_2*\lambda_3*\lambda_3^**\omega_2*\lambda_3+\lambda_1*\lambda_2*\lambda_3*\omega_3 \\
&= \lambda*(\lambda_3^**\lambda_2^**\omega_1*\lambda_2*\lambda_3+\lambda_3^**\omega_2*\lambda_3+\omega_3) \\
&= \lambda*\omega_E
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

故 $$\omega_E=\lambda_3^**\lambda_2^**\omega_1*\lambda_2*\lambda_3+\lambda_3^**\omega_2*\lambda_3+\omega_3 \tag{2.45}$$

如果欧拉角按图1.1所示之顺序旋转，则

$$\omega_1=\dot{\varphi}i_3,\ \omega_2=\dot{\psi}i_2,\ \omega_3=\dot{\gamma}i_1$$

$$\lambda_1=\cos\frac{\varphi}{2}+i_3\sin\frac{\varphi}{2},\quad \lambda_1^*=\cos\frac{\varphi}{2}-i_3\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\lambda_2=\cos\frac{\psi}{2}+i_2\sin\frac{\psi}{2},\quad \lambda_2^*=\cos\frac{\psi}{2}-i_2\sin\frac{\psi}{2}$$

$$\lambda_3=\cos\frac{\gamma}{2}+i_1\sin\frac{\gamma}{2},\quad \lambda_3^*=\cos\frac{\gamma}{2}-i_1\sin\frac{\gamma}{2}$$

则

$$
\begin{aligned}
\lambda_3^**\omega_2*\lambda_3 &= \left(\cos\frac{\gamma}{2}-i_1\sin\frac{\gamma}{2}\right)*\dot{\psi}i_2*\left(\cos\frac{\gamma}{2}+i_1\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\
&= i_2\dot{\psi}\cos\gamma-i_3\dot{\psi}\sin\gamma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_2^**\omega_1*\lambda_2 &= \left(\cos\frac{\psi}{2}-i_2\sin\frac{\psi}{2}\right)*\dot{\varphi}i_3*\left(\cos\frac{\psi}{2}+i_2\sin\frac{\psi}{2}\right) \\
&= i_3\dot{\varphi}\cos\psi-i_1\dot{\varphi}\sin\psi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_3^**(\lambda_2^**\omega_1*\lambda_2)*\lambda_3 \\
&= \left(\cos\frac{\gamma}{2}-i_1\sin\frac{\gamma}{2}\right)*(i_3\dot{\varphi}\cos\psi-i\dot{\varphi}\sin\psi) \\
&\quad *\left(\cos\frac{\gamma}{2}+i_1\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\
&= -i_1\dot{\varphi}\sin\psi+i_2\dot{\varphi}\sin\gamma\cos\psi+i_3\dot{\varphi}\cos\gamma\cos\psi
\end{aligned}
$$

故 $$\omega_E = i_1(\dot{\gamma} - \dot{\varphi}\sin\psi) + i_2(\dot{\psi}\cos\gamma + \dot{\varphi}\sin\gamma\cos\psi) + i_3(\dot{\varphi}\cos\gamma\cos\psi - \dot{\psi}\sin\gamma) = i_1\omega_{x1} + i_2\omega_{y1} + i_3\omega_{z1}$$

故 $$\begin{cases}\omega_{x1} = \dot{\gamma} - \dot{\varphi}\sin\psi \\ \omega_{y1} = \dot{\varphi}\sin\gamma\cos\psi + \dot{\psi}\cos\gamma \\ \omega_{z1} = \dot{\varphi}\cos\gamma\cos\psi - \dot{\psi}\sin\gamma\end{cases}$$

很容易化成(1.5)式形式的欧拉方程。

§3 四元数方程的研究

以上我们已经介绍了三种不同类型的参数，即欧拉角、方向余弦和四元数，借助于这些运动学参数，都可以确定刚体在空间的姿态，其方程分别为(1.5)式、(1.9)式和(2.27)（或(2.29)式）式。欧拉方程是三个非线性方程组，有一个奇点，在此点方程组是奇异的。方向余弦方程是九个线性方程组，必须满足正交条件的六个关系式，而四元数方程是四个线性方程组，只需满足一个范数为1的条件，故与其他两种参数相比，四元数方程具有如下的特点。

(1) 与欧拉角速度方程不同，它是一组非退化的线性微分方程，没有奇点，原则上总是可解的。

(2) 与方向余弦方程相比，四元数有最低数目的非退化参数和最低数目的联系方程，通过四元数的形式运算，可单值地给定正交变换的运算。

(3) 四元数可以明确地表示出刚体运动的两个重要物理量：旋转欧拉轴和旋转角。

(4) 四元数代数法，可以用超复数空间矢量来表示欧拉旋转矢量，超复数空间与三维实空间相对应。

所以用四元数来研究刚体的运动特性，是最方便的。

研究方程(2.27)和(2.29)，式中ω_E和ω_I是旋转角速度分

别在坐标系E和坐标系I上的投影，都是给定的(已知的)时间函数，其标量形式都是四个线性微分方程组，为了给出(2.27)和(2.29)式的通解，有以下定理。

定理 1 设$\omega_E(t)$，$\omega_I(t)$已知，$N(t)$是四元数方程(2.27)和(2.29)的解，则四元数

$$q_E = C_E * N(t) \tag{2.46}$$

是(2.27)式的解，而

$$q_I = N(t) * C_I \tag{2.47}$$

是(2.29)式的解，其中C_E，C_I是常值四元数。

此定理只需将(2.46)式和(2.47)式相应的代入(2.27)式和(2.29)式，立即得证。

通过常数C_E，C_I的适当选择，可以用(2.46)、(2.47)式来表示方程(2.27)、(2.29)满足所需起始条件的任意解，所以它们是相应四元数方程的通解。对任意起始条件$q_E(t_0)$，由(2.46)式

$$q_E(t_0) = C_E * N(t_0) = C_E * N_0$$

故
$$C_E = q_E(t_0) * N_0^* \tag{2.48}$$

同理
$$C_I = N_0^* * q_I(t_0) \tag{2.49}$$

方程(2.27)和(2.29)是刚体同一种运动的两种不同的描述形式，它们的解应该是相同的。但是把(2.46)形式的解q_E代入(2.29)式，则

$$C_E * \dot{N}(t) = \frac{1}{2}\omega_I * C_E * N(t) \tag{2.50}$$

即
$$C_E * \frac{1}{2} N(t) * \omega_E = \frac{1}{2}\omega_I * C_E * N(t) \tag{2.51}$$

因为四元数$N(t)$是将坐标系I转换成坐标系E的旋转变换四元数，故

$$\omega_E = N^*(t) * \omega_I * N(t) \tag{2.52}$$

代入(2.51)式，得

$$C_E * \omega_I = \omega_I * C_E \tag{2.53}$$

由于四元数乘法是不能交换的，故在一般情况下，(2.53)式是不能成立的。除非满足以下三个条件：

(1) 有一个四元数为零。

(2) 共线，即C_E的矢量部分在ω方向上。

(3) $C_E = 1$，则 $q_E(t_0) * N_0^* = 1$，同理亦可推出 $C_I = N_0^* * q_I(t_0) = 1$.

三个条件中，只有第三条是可能的。由此可以看出，同时满足两种形式方程的唯一解是$N(t)$.

这可以从以下的解释中看出其物理意义，如图 2.3 用矢量

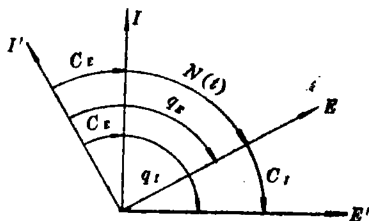


图 2.3 坐标系E, I与四元数$N(t)$关系示意图

来表示坐标系，四元数$N(t)$是将坐标系I转换成坐标系E的转换四元数。它描述由于角速度ω_I的存在，在坐标系I上看坐标系E相对于I的运动。如果另有一坐标系E'，亦以ω_I角速度相对于坐标系I运动，则它和坐标系E的相对位置不变，可以由常值四元数C_I确定，且都满足方程(2.29)，故四元数方程(2.29)的解$q_I(t) = N(t) * C_I$形成解集。同理，(2.27)式的解$q_E(t) = C_E * N(t)$亦形成解集，两解集的交集即是唯一解$N(t)$。因此有如下定理。

定理 2 对于刚体的同一种运动来说，解集在一个点上而且只能在一个点上相交，解$N(t)$就是属于两个解集的交集的点。

实际上，假定$N(t)$是满足两种形式方程(2.27)和(2.29)的解，且知此时

$$\begin{cases} q_E(t_0)*N_0^*=1 \\ N_0^**q_I(t_0)=1 \end{cases} \tag{2.54}$$

故
$$q_E(t_0)=N(t_0)=q_I(t_0)$$

即两方程具有同一起始条件，故$N(t)$是唯一的。$N(t)$是两种形式方程(2.27)和(2.29)的特解。如果给定起始条件，任取一种形式的方程进行积分，所得的解亦满足另一种形式的方程。故此两种形式的方程，实际表示刚体的同一运动。

如果对角速度ω进行正交变换

$$\omega'=S*\omega*S^* \tag{2.55}$$

则ω'确定运动学方程，可由如下定理得到。

定理 3 设$N(t)$是角速度为$\omega(t)$的运动的运动学方程的解。若角速度

$$\omega'=S*\omega*S^*$$

这里S是常值四元数，表示一种正交变换，则

$$N'=S*N*S^* \tag{2.56}$$

是方程

$$2\lambda'=\omega_I'*\lambda'=\lambda'*\omega_E' \tag{2.57}$$

的特解。

证 因

$$\begin{cases} \omega_I'=S*\omega_I*S^*, \quad \omega_I=S^**\omega_I'*S \\ \omega_E'=S*\omega_E*S^*, \quad \omega_E=S^**\omega_E'*S \\ N'=S*N*S^*, \quad N=S^**N'*S \end{cases} \tag{2.58}$$

将其代入(2.27)和(2.29)式，则

$$2S^{*}*\dot{N}'*S=(S^{*}*\omega_I'*S)*(S^{*}*N'*S)$$

故 $$2\dot{N}'=\omega_I*N'$$

$$2S^{*}*\dot{N}'*S=(S^{*}*N'*S)*(S^{*}*\omega_E'*S)$$

故 $$2\dot{N}'=N'*\omega_E'$$

故N'是方程

$$2\dot{\lambda}'=\omega_I'*\lambda'=\lambda'*\omega_E'$$

的特解。

如果角速度矢量函数$\omega(t)$已知，则$\omega(t)/\omega(t)$为单位角速度矢量。通过如下的变换，可将四元数方程化为单位角速度矢量的四元数方程，令

$$\theta=\int_0^t\omega(t)dt=\varphi(t) \qquad \omega(t)\neq 0 \tag{2.59}$$

则 $$\frac{d\theta}{dt}=\omega(t)，\ t=\varphi^{-1}(\theta) \tag{2.60}$$

代入(2.27)和(2.29)式，则得：

$$\frac{dq}{d\theta}=\frac{1}{2}\ \frac{\omega_I(\theta)}{\omega(\theta)}*q=\frac{1}{2}q*\frac{\omega_E(\theta)}{\omega(\theta)} \tag{2.61}$$

以上研究了表示刚体运动的四元数微分方程解的唯一性。下面来叙述一下，在某些特殊情况下，四元数方程的特点。

(1) 四元数的表示法

在第一章的叙述中，我们已知四元数单位矢量起着虚数单位的作用，即$\zeta*\zeta=-1$，类似于复数表示的欧拉公式。四元数可以类似地写为

$$q=\cos\frac{\alpha}{2}+\zeta\sin\frac{\alpha}{2}=\exp\left(\zeta\frac{\alpha}{2}\right) \tag{2.62}$$

其共轭四元数

$$q^*=\cos\frac{\alpha}{2}-\zeta\sin\frac{\alpha}{2}=\exp\left(-\zeta\frac{\alpha}{2}\right) \tag{2.63}$$

利用棣莫佛公式，则

$$q^n=\cos\left(n\frac{\alpha}{2}\right)+\zeta\sin\left(n\frac{\alpha}{2}\right)=\exp\left(\zeta n\frac{\alpha}{2}\right) \tag{2.64}$$

但由于四元数乘法是不符合交换律的，故

$$q*\lambda=\exp\left(\zeta\frac{\alpha}{2}\right)*\exp\left(\mu\frac{\beta}{2}\right)\neq\exp\left(\zeta\frac{\alpha}{2}+\mu\frac{\beta}{2}\right) \tag{2.65}$$

只有在两种特殊情况下，上式等式才能成立。

1） ζ和μ共线，即$\zeta=\mu=\gamma$，则

$$q*\lambda=\exp\left(\zeta\frac{\alpha}{2}\right)*\exp\left(\mu\frac{\beta}{2}\right)=\exp\left(\gamma\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{2.66}$$

实际是进行平面旋转。在球面表示法上则对应于同一大圆的弧相加。

2） α和β为无穷小量，在略去二阶微量情况下

$$\begin{aligned}q*\lambda&=\exp\left(\zeta\frac{\alpha}{2}\right)*\exp\left(\mu\frac{\beta}{2}\right)\\&=\left[1+\zeta\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2!}\left(\zeta\frac{\alpha}{2}\right)^2+\cdots\right]\\&\quad\cdot\left[1+\mu\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2!}\left(\mu\frac{\beta}{2}\right)^2+\cdots\right]\\&=1+\zeta\frac{\alpha}{2}+\mu\frac{\beta}{2}=\exp\left(\zeta\frac{\alpha}{2}+\mu\frac{\beta}{2}\right)\end{aligned} \tag{2.67}$$

（2）四元数的导数

四元数对时间的导数定义为

$$\frac{dq}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\exp\left[\frac{1}{2}\zeta(t+\Delta t)\alpha(t+\Delta t)\right]-\exp\left[\frac{1}{2}\zeta(t)\alpha(t)\right]}{\Delta t}\right\}$$

(2.68)

指数幂可展成级数

$$\zeta(t+\Delta t)\alpha(t+\Delta t)$$
$$=\zeta(t)\alpha(t)+\dot{\zeta}(t)\alpha(t)\Delta t+\zeta(t)\dot{\alpha}(t)\Delta t+O(\Delta t)$$

(2.69)

由于不能将指数幂的和分开成各指数的乘积，故在一般情况下，(2.68)式无法运算。

但如果设ζ为常值矢量，则指数幂(2.69)式可写成

$$\zeta(t+\Delta t)\alpha(t+\Delta t)=\zeta\alpha(t)+\zeta\dot{\alpha}(t)\Delta t+O(\Delta t)$$

而 $\exp\left[\frac{1}{2}\zeta(t+\Delta t)\alpha(t+\Delta t)\right]$

$$=\exp\left[\frac{1}{2}\zeta\alpha(t)\right]*\exp\left\{\frac{1}{2}[\zeta\dot{\alpha}(t)\Delta t+O(\Delta t)]\right\}$$

(2.70)

故

$$\frac{dq}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\exp\left[\frac{1}{2}\zeta\alpha(t)\right]*\left\{\exp\left[\frac{1}{2}\zeta\dot{\alpha}(t)\Delta t+O(\Delta t)\right]-1\right\}}{\Delta t}$$

$$=\exp\left[\frac{1}{2}\zeta\alpha(t)\right]*\frac{1}{2}\zeta\dot{\alpha}(t)=\frac{1}{2}\zeta\dot{\alpha}(t)*\exp\left[\frac{1}{2}\zeta\alpha(t)\right]$$

(2.71)

即

$$\frac{dq}{dt}=\frac{1}{2}q*\zeta\dot{\alpha}=\frac{1}{2}\zeta\dot{\alpha}*q \tag{2.72}$$

这是因为ζ为常值矢量，ζ和 q 共线，故因子可以互易。

与(2.27)、(2.29)式比较，可以看出它们的解是

$$N(t)=\exp\left(\frac{1}{2}\zeta\alpha\right) \tag{2.73}$$

而角速度 $\quad \boldsymbol{\omega}(t)=\zeta\omega(t)=\zeta\dot{\alpha}(t) \quad (2.74)$

具有不变方向，此两式的通解为

$$q_I=\exp\left[\frac{1}{2}\zeta_I\alpha(t)\right]*C_I \tag{2.75}$$

$$q_E=C_E*\exp\left[\frac{1}{2}\zeta_E\alpha(t)\right] \tag{2.76}$$

其中

$$\alpha(t)=\int_0^t[\boldsymbol{\omega}(\tau)\cdot\zeta]d\tau=\int_0^t\omega(\tau)d\tau \tag{2.77}$$

因为是研究同一运动，显然

$$q_I(t)=q_E(t) \tag{2.78}$$

当$t=0$时，$\alpha(0)=0$

$$q_I(0)=C_I=q_E(0)=C_E \tag{2.79}$$

故

$$C_I*C_I^**\left\{\exp\left[\frac{1}{2}\zeta_I\alpha(t)\right]*C_I\right\}=C_I*\exp\left[\frac{1}{2}\zeta_E\alpha(t)\right]$$

故当 $\quad \zeta_E=C_I^**\zeta_I*C_I \quad (2.80)$

即 $\quad \omega_E=C_I^**\omega_I*C_I \quad (2.81)$

得到满足时，才有$q_I=q_E$. 说明两种形式的四元数方程，仅仅决定于某一给定的起始条件，当$C_I=1$时，$N(t)$变为特解

$$N(t)=\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t\omega(\tau)d\tau\right] \tag{2.82}$$

所得的解，表示在固定平面上的旋转运动。

(3) 非常值四元数进行正交变换时，四元数方程解的研究

定理 3 给出了当角速度

$$\omega' = S*\omega*S^*$$

当 S 为常值四元数时，

$$N' = S*N*S^*$$

是方程 $$2\dot{\lambda}' = \omega_I*\lambda' = \lambda'*\omega_E$$

的特解。

如果 S 为非常值四元数，则当

$$N' = S*N*S^*$$

时，求微分得

$$\dot{N}' = \dot{S}*N*S^* + S*\dot{N}*S^* - S*N*S^**\dot{S}*S^* \tag{2.83}$$

假定四元数 S 满足这样的方程

$$2\dot{S} = \Omega_I*S \tag{2.84}$$

而 $$2\dot{N} = \omega_I*N$$

则 $$\begin{aligned}2\dot{N}' &= \Omega_I*S*N*S^* + S*\omega_I*N*S^* \\ &\quad - S*N*S^**\Omega_1*S*S^* \\ &= (\Omega_I*N' - N'*\Omega_I) + \omega_I'*N'\end{aligned} \tag{2.85}$$

而 $$2\dot{\lambda}' = \omega_I'\lambda' \tag{2.86}$$

可以看出，只有当

$$\Omega_I*N' - N'*\Omega_I = 0 \tag{2.87}$$

时，N'才是方程(2.86)的解，由(2.87)式

$$\Omega_I*N' = N'*\Omega_I \tag{2.88}$$

只有当$\Omega_I = 0$时才能成立，即 S 为常值四元数。

(4) 刚体运动的分解

刚体的空间运动可以分解成为很多简单的平面运动。如第二节由四元数方程推导欧拉方程那样，将空间转动分解成为三个平面转动来进行推导，则每个简单运动都对应于一个四元数。利用四元数乘法，即可确定刚体转动。设

$$\lambda=\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_n \tag{2.89}$$

则 $$2\dot{\lambda}=2\dot{\lambda}_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_n+\lambda_1*2\dot{\lambda}_2*\lambda_3*\cdots*\lambda_n$$
$$+\cdots+\lambda_1*\cdots*2\dot{\lambda}_n$$
$$=(\omega_{1I}+\lambda_1*\omega_{2I}*\lambda_1^*+\lambda_1*\lambda_2*\omega_{3I}*\lambda_2^**\lambda_1^*$$
$$+\cdots+\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_{n-1}*\omega_{nI}*\lambda_{n-1}^**\cdots*\lambda_1^*)*\lambda$$
$$=\omega_I*\lambda \tag{2.90}$$

故 $$\omega_I=\omega_{1I}+\lambda_1*\omega_{2I}*\lambda_1^*$$
$$+\cdots+\lambda_1*\lambda_2*\cdots*\lambda_{n-1}*\omega_{nI}*\lambda_{n-1}^**\cdots*\lambda_1^* \tag{2.91}$$

假定ω_{1I}，ω_{2I}，$\cdots\omega_{nI}$是已知的，则可以求出ω_I和λ.

§4 四元数方程的解法

一、四元数方程的形式解

研究一个无穷小变换四元数

$$\Delta\lambda=\exp\left[\frac{1}{2}\omega(t+\xi\Delta t)\Delta t\right],\quad 0\leqslant\xi\leqslant1 \tag{2.92}$$

假定在时间区间$[t, t+\Delta t]$内，角速度的值为常数且等于其在区间中某一点的值，使Δt趋于零，取极限，则得到四元数增量的精确值

$$d\lambda(t)=\exp\left[\frac{1}{2}\omega(t)dt\right] \tag{2.93}$$

设整个时间区间为$[0,\ T]$，将其分成n个间隔Δt_i，这里

$$\Delta t_{i+1}=t_{i+1}-t_i,\quad |\Delta t_i|\leqslant\frac{K_T}{n},$$

K_T为某一给定常数，$i=1,\cdots,n$

则 $$\lambda(t_{i+1})=\lambda(t_i)*\Delta\lambda(t_i)$$

$$=\lambda(t_i)*\exp\left[\frac{1}{2}\omega_E(t_i+\xi_{i+1}\Delta t_{i+1})\Delta t_{i+1}\right] \qquad (2.94)$$

如果设 $t=0$时，$\lambda(0)=\lambda_0$，则

$$\lambda(t_{i+1})=\lambda_0*\exp\left[\frac{1}{2}\omega_E(\xi_1\Delta t_1)\Delta t_1\right]$$

$$*\exp\left[\frac{1}{2}\omega_E(t_1+\xi_2\Delta t_2)\Delta t_2\right]$$

$$*\cdots*\exp\left[\frac{1}{2}\omega_E(t_i+\xi_{i+1}\Delta t_{i+1})\Delta t_{i+1}\right]$$

$$(2.95)$$

如果以球面上的弧来表示四元数，则(2.95)式示意图 如图 2.4 所示，如果 n 增加到无穷大，则 $\Delta\lambda\to d\lambda$，而(2.95)式 趋近于

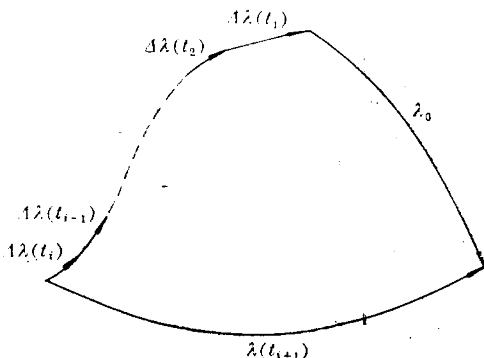


图 2.4　四元数方程解的图示法

(2.27)式的解，此时

$$\lambda(T)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta t_i\to 0}}\prod_{i=0}^{n}\exp\left[\frac{1}{2}\omega_E(t_i+\xi_{i+1}\Delta t_{i+1})\Delta t_{i+1}\right]$$

$$(2.96)$$

如果极限存在，则用符号$\overset{T}{\underset{0}{\mathrm{S}}}$来表示成

$$\lambda_E(T)=\lambda_0*\overset{T}{\underset{0}{\mathrm{S}}}\exp\left[\frac{1}{2}\omega_E(t)dt\right] \tag{2.97}$$

它是方程(2.27)的解。

同理方程(2.29)的解为

$$\lambda_I(T)=\overset{T}{\underset{0}{\mathrm{S}}}\exp\left[\frac{1}{2}\omega_I(t)dt\right]*\lambda_0 \tag{2.98}$$

方程(2.97)和(2.98)称为方程(2.27)和(2.29)的形式解。如果角速度矢量方向不变，则

$$\left\{\begin{aligned}&\overset{T}{\underset{0}{\mathrm{S}}}\exp\left[\frac{1}{2}\omega_E(t)dt\right]=\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t\omega_E(t)dt\right]\\&=I+\frac{1}{2}\int_0^t\omega_E(t)dt+\frac{1}{4}\left[\int_0^t\omega_E(t)dt\right]^2\\&\quad+\frac{1}{4\cdot3!}\left[\int_0^t\omega_E(t)dt\right]^3+\cdots\\&\overset{T}{\underset{0}{\mathrm{S}}}\exp\left[\frac{1}{2}\omega_I(t)dt\right]=\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t\omega_I(t)dt\right]\\&=I+\frac{1}{2}\int_0^t\omega_I(t)dt+\frac{1}{4}\left[\int_0^t\omega_E(t)dt\right]^2\\&\quad+\frac{1}{4\cdot3!}\left[\int_0^t\omega_E(t)dt\right]^3+\cdots\end{aligned}\right. \tag{2.99}$$

二、四元数方程解的积分表示法

以(2.27)式为例，此时四元数方程为

$$\dot{\lambda}=\frac{1}{2}\lambda*\omega_E=\frac{1}{2}M^*(\omega_E)Q(\lambda) \tag{2.100}$$

设其解为 $$\lambda(t)=\lambda(t_0)*q(t) \tag{2.101}$$

代入(2.100)式得

$$\dot{q}=\frac{1}{2}q*\omega_E=\frac{1}{2}M^*(\omega_E)Q(q) \tag{2.102}$$

方程(2.102)的解满足起始条件

$$q(t_0)=1 \tag{2.103}$$

其解可写成

$$q=I+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega_E(t')dt' + \frac{1}{4}\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t'}\omega_E(t'')dt''\right]*\omega_E(t')dt'+\cdots \tag{2.104}$$

如果$\omega_E(t)$已知，则利用(2.104)式，可以得到$q(t)$的各阶近似解. (2.104)式与(2.99)式不同，它是四元数方程在起始条件$q(t_0)=1$ 下的精确解，但是它是以多重积分的形式来表示的，如果积分收敛很慢，计算起来也是很不方便的。

通常 $\omega_E(t)$的值不能瞬时得到，原始信息往往以积分步长内角速度积分的形式输入。如果令四元数

$$\alpha(t)=\int_{t_0}^{t}\omega_E(t')dt' \tag{2.105}$$

这时，在第 n 步的原始信息是这个四元数的一次向后差分

$$\Delta\alpha_n=\alpha(t_n)-\alpha(t_{n-1})=\int_{t_{n-1}}^{t_n}\omega_E(t')dt' \tag{2.106}$$

如果令

$$\tau=\frac{t-t_{n-1}}{h} \tag{2.107}$$

这里$h=t_n-t_{n-1}$为积分步长，则$\alpha(t)$可利用四阶差分向后插值

公式表示成

$$\alpha(\tau)=\alpha(0)+\left(\Delta_n\alpha-\frac{1}{2}\Delta_n^2\alpha+\frac{1}{3}\Delta_n^3\alpha-\frac{1}{4}\Delta_n^4\alpha\right)\tau$$
$$+\left(\frac{1}{2}\Delta_n^2\alpha-\frac{1}{2}\Delta_n^3\alpha+\frac{11}{24}\Delta_n^4\alpha\right)\tau^2$$
$$+\left(\frac{1}{6}\Delta_n^3\alpha-\frac{1}{4}\Delta_n^4\alpha\right)\tau^3+\frac{1}{24}\Delta_n^4\alpha\tau^4 \qquad (2.108)$$

$$\frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}=\left(\Delta_n\alpha-\frac{1}{2}\Delta_n^2\alpha+\frac{1}{3}\Delta_n^3\alpha-\frac{1}{4}\Delta_n^4\alpha\right)$$
$$+\left(\Delta_n^2\alpha-\Delta_n^3\alpha+\frac{11}{12}\Delta_n^4\alpha\right)\tau$$
$$+\left(\frac{1}{2}\Delta_n^3\alpha-\frac{3}{4}\Delta_n^4\alpha\right)\tau^2+\frac{1}{6}\Delta_n^4\alpha\tau^3 \qquad (2.109)$$

由于各阶差分均为常数，故将(2.108)和(2.109)式代入(2.104)式，即可求出四元数 q。

三、解四元数方程的递推法

设计算步长为Δt_K，在积分步长区间内令

$$\boldsymbol{\omega}_E=\omega_{xK}\boldsymbol{e}_1+\omega_{yK}\boldsymbol{e}_2+\omega_{zK}\boldsymbol{e}_3 \qquad (2.110)$$
$$|\boldsymbol{\omega}_E|=\omega_K$$

ω_K、ω_{xK}、ω_{yK}、ω_{zK} 均为常数（可取积分区间任一点值），定义四元数

$$\Delta q(t_K)=\cos\frac{\omega_K\Delta t_K}{2}+\boldsymbol{e}_1\frac{\omega_{xK}}{\omega_K}\sin\frac{\omega_K\Delta t_K}{2}$$
$$+\boldsymbol{e}_2\frac{\omega_{yK}}{\omega_K}\sin\frac{\omega_K\Delta t_K}{2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\omega_{zK}}{\omega_K}\sin\frac{\omega_K\Delta t_K}{2}$$
$$(2.111)$$

则 $$q(t_{K+1})=q(t_K)*\Delta q(t_K) \tag{2.112}$$

即
$$\begin{bmatrix} q_{0K+1} \\ q_{1K+1} \\ q_{2K+1} \\ q_{3K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0K}, & -q_{1K}, & -q_{2K}, & -q_{3K} \\ q_{1K}, & q_{0K}, & -q_{3K}, & q_{2K} \\ q_{2K}, & q_{3K}, & q_{0K}, & -q_{1K} \\ q_{3K}, & -q_{2K}, & q_{1K}, & q_{0K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\omega_K \Delta t_K}{2} \\ \dfrac{\omega_{xK}}{\omega_K}\sin\dfrac{\omega_K \Delta t_K}{2} \\ \dfrac{\omega_{yK}}{\omega_K}\sin\dfrac{\omega_K \Delta t_K}{2} \\ \dfrac{\omega_{zK}}{\omega_K}\sin\dfrac{\omega_K \Delta t_K}{2} \end{bmatrix} \tag{2.113}$$

如此反复递推，即可求出$q(t)$。由于在Δt_K区间内取角速度及其分量为常数，会引起计算误差。

四、数值积分法求四元数方程的解

无论是利用(2.27)式或(2.29)式，都可以将四元数方程写成

$$\dot{q}=\frac{1}{2}M^*(\omega_E)Q(q)=\frac{1}{2}M(\omega_I)Q(q)$$

为了书写方便，引入符号

$$\Omega=M^*(\omega_E)=\begin{bmatrix} 0, & -\omega_{xE}, & -\omega_{yE}, & -\omega_{zE} \\ \omega_{xE}, & 0, & \omega_{zE}, & -\omega_{yE} \\ \omega_{yE}, & -\omega_{zE}, & 0, & \omega_{xE} \\ \omega_{zE}, & \omega_{yE}, & -\omega_{xE}, & 0 \end{bmatrix}$$

$$=M(\omega_I)=\begin{bmatrix}0, & -\omega_{xI}, & -\omega_{yI}, & -\omega_{zI}\\ \omega_{xI}, & 0, & -\omega_{zI}, & \omega_{yI}\\ \omega_{yI}, & \omega_{zI}, & 0, & -\omega_{xI}\\ \omega_{zI}, & -\omega_{yI}, & \omega_{xI}, & 0\end{bmatrix} \tag{2.114}$$

则四元数方程可写成

$$\dot{q}=\frac{1}{2}\Omega q \tag{2.115}$$

这是一阶四维标量微分方程，其标量之间满足正交关系式

$$q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1 \tag{2.116}$$

如果利用一阶差分法解标量方程时，计算步长为Δt_K，则

$$q_{K+1}=q_K+\frac{\Delta t_K}{2}\Omega_K q_K \tag{2.117}$$

式中 $$q_{K+1}^T=(q_{0K+1},\ q_{1K+1},\ q_{2K+1},\ q_{3K+1}) \tag{2.118}$$

表示在t_{K+1}瞬间的四元数。

如果利用四阶差分龙格-库塔法计算时，则

$$q_{K+1}=q_K+\frac{1}{6}(\Delta_K'+2\Delta_K''+2\Delta_K'''+\Delta_K'''') \tag{2.119}$$

式中

$$\begin{cases}\Delta_K'=\dfrac{\Delta t_K}{2}\Omega(t_K)q_K\\ \Delta_K''=\dfrac{\Delta t_K}{2}\Omega\left(t_K+\dfrac{\Delta t_K}{2}\right)\left(q_K+\dfrac{\Delta_K'}{2}\right)\\ \Delta_K'''=\dfrac{\Delta t_K}{2}\Omega\left(t_K+\dfrac{\Delta t_K}{2}\right)\left(q_K+\dfrac{\Delta_K''}{2}\right)\\ \Delta_K''''=\dfrac{\Delta t_K}{2}\Omega(t_K+\Delta t_K)(q_K+\Delta_K''')\end{cases} \tag{2.120}$$

与递推法不同，积分表示法的近似计算和差分法数值积分，都

不能保证四元数的正规性，即不能保证$N(q)=1$. 为了能在所要求的精度范围内保持正规性，对计算步长有一定的限制，以一阶差分计算法为例，设在t_k瞬间四元数是正规的，即

$$q_K^T q_K = 1$$

在$t_{K+1}=t_K+\Delta t_K$瞬间

$$q_{K+1}^T q_{K+1} = \left(q_K^T + \frac{\Delta t_K}{2} q_K^T \Omega_K^T\right)\left(q_K + \frac{\Delta t_K}{2} \Omega q_K\right)$$

$$= q_K^T q_K + \frac{\Delta t_K}{2}(q_K^T \Omega q_K + q_K^T \Omega^T q_K) + \frac{\Delta t_K^2}{4} q_K^T \Omega^T \Omega q_K$$

$$= 1 + \frac{\Delta t_K^2}{4} q_K^T \Omega^T \Omega q_K$$

故 $$q_{K+1}^T q_{K+1} = 1 + \frac{\Delta t_K^2}{4} \omega_K^2 \tag{2.121}$$

为了保持正交性，必须使

$$q_{K+1}^T q_{K+1} = 1$$

即要求

$$\frac{\Delta t_K^2}{4} \omega_K^2 \leqslant 10^{-x} \tag{2.122}$$

x为所要求的精度指标。可以看出要求的精度与计算步长有关。由于方程计算误差和舍入误差，即使采用高阶差分数值解法，若不采取特别措施，随着时间的增加，正规关系式$q^T * q = 1$的关系，将不再成立。为此在进行计算时，必须进行范数修正。

§5 非规范化四元数方程及范数的自动修正方法

对于正交变换的四元数范数

$$q*q^*=1$$

这个联系方程是由正交变换的性质决定的，它不能由四元数方程本身得到。因为

$$\dot{q}=\frac{1}{2}q*\omega_E \tag{2.123}$$

$$\dot{q}^*=\frac{1}{2}(q*\omega_E)^*=\frac{1}{2}\omega_E^**q^*=-\frac{1}{2}\omega_E*q^* \tag{2.124}$$

如果以q^*左乘(2.123)式，以q右乘(2.124)式，然后相加，则得

$$q^**\dot{q}+\dot{q}^**q=0$$

即
$$\frac{d}{dt}(q^**q)=0 \tag{2.125}$$

$$q^**q=常数$$

可以看出四元数方程，只能给出$q*q^*=N^2$为常数。并不要求范数$N^2=1$. 只能通过起始条件的确定，来满足正交变换的要求。

但是在计算过程中，由于计算误差，如果不采取措施，随着时间增加，将不能保证范数为1的条件，即破坏了正交性。因此需要对范数进行修正。下面研究一种自动修正的方法。

设非规范四元数q

$$q*q^*=N^2>0$$

将q规范化，用$\tilde{q}$表示规范化四元数

$$\tilde{q}=\frac{1}{N}q \tag{2.126}$$

设描述坐标系变换的四元数$\tilde{q}$满足方程

$$\dot{\tilde{q}}=\frac{1}{2}\tilde{q}*\omega_E \tag{2.127}$$

微分(2.126)式

$$\dot{\tilde{q}}=\frac{1}{N}\dot{q}-\frac{\dot{N}}{N^2}q \qquad (2.128)$$

将(2.128)式代入(2.127)式，则得非规范四元数 q 的方程

$$\dot{q}=\frac{\dot{N}}{N}q+\frac{1}{2}q*\omega_E \qquad (2.129)$$

这里$\dot{N}$是非规范化四元数 q 的范数的变化，可理解为在计算过程中由于各种误差的影响，而引起的 q 偏离规范值。它是时间的函数，可令

$$\frac{\dot{N}}{N}=f(t) \qquad (2.130)$$

则方程(2.129)变为

$$\dot{q}=f(t)q+\frac{1}{2}q*\omega_E \qquad (2.131)$$

这里$f(t)$表示在计算过程中，四元数范数的变化特性。如果范数变化特性已知，则方程(2.129)与方程(2.27)是等价的。因此，不论范数的数值变化特性如何，方程解 $\tilde{q}$ 和 q 都可以描述同一坐标变换。此时非规范四元数变换$q*(\quad)*q^{-1}$对应于规范四元数变换$\tilde{q}*(\quad)*\tilde{q}^*$.

可以看出在方程中附加$f(t)q$项，不改变方程的物理涵义。方程(2.131)和方程(2.27)是描述同一运动的运动方程，只是用(2.130)式替代了(2.125)式，而对$f(t)$是没有任何限制的。由(2.130)式，可得

$$\frac{dN}{dt}=f(t)N \qquad (2.132)$$

为了保持四元数方程的范数为常数（实际上，通过起始条件的选择，范数为1）的特性，应使范数N稳定于1。

利用函数$f(t)$形式选择的任意性，可使$N=1$的点成为方程(2.132)的渐近稳定的平衡位置。例如可以采取如下几种形式的$f(t)$.

(1) $f=K(1-N)$，则

$$N=\left[1+\frac{1-N_0}{N_0}e^{-kt}\right]^{-1}$$

(2) $f=-K\ln N$，则

$$N=\exp[e^{-kt}\ln N_0]$$

(3) $f=-K(N^2-1)$，则

$$N=\left[1-\frac{N_0^2-1}{N_0^2}e^{-2kt}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

以$f=K(1-N)$为例，如果用一阶差分解(2.131)式，则

$$q_{K+1}=q_K+\Delta t_K\left[K(1-N_K)q_K+\frac{1}{2}\Omega_K q_K\right]$$

$$N_{K+1}^2=q_{K+1}^T q_{K+1}=\left\{q_K^T+\Delta t_K\left[K(1-N_K)q_K^T+\frac{1}{2}q_K^T\Omega_K^T\right]\right\}$$

$$\cdot\left\{q_K+\Delta t_K\left[K(1-N_K)q_K+\frac{1}{2}\Omega_K q_K\right]\right\}$$

$$=q_K^T q_K+\Delta t_K K(1-N)q_K^T q_K+\frac{1}{2}q_K^T\Omega_K^T q_K$$

$$+\Delta t_K K(1-N)q_K^T q_K+\frac{1}{2}q_K^T\Omega_K q_K$$

$$+\Delta t_K^2\left[K(1-N_K)q_K^T+\frac{1}{2}q_K^T\Omega_K^T\right]$$

$$\cdot\left[K(1-N_K)q_K+\frac{1}{2}\Omega_K q_K\right]。$$

$$
\begin{aligned}
&= N_K^2 + 2\Delta t_K K(1-N_K)N_K^2 + \Delta t_K^2 K^2(1-N)^2 N_K^2 \\
&\quad + \frac{\Delta t_K^2}{4} q_K^T \Omega^T \Omega q_K \\
&= N_K^2 \left\{ [1 + 2\Delta t_K K(1-N_K)]^2 + \frac{1}{4}\Delta t_K^2 \omega_K^2 \right\}
\end{aligned}
$$

如果$N_K^2>1$，则$N_{K+1}^2\downarrow$；$N_K^2<1$，则$N_{K+1}^2\uparrow$，故稳定于1。

第三章　四元数在刚体运动控制中的应用

§1　刚体运动的姿态稳定与姿态控制的一般概念

刚体在空间运动时，经常会遇到姿态稳定和姿态控制问题。所谓姿态稳定是指刚体在运动过程中，将刚体某一轴稳定在给定方向上；而姿态控制则是将刚体从现时姿态控制转换到某一给定方向或给定姿态上去。前者称为定向问题，后者称为定位问题。例如天体物理学卫星，卫星的姿态要能保证星上的探测器（如天文望远镜）对准所要探测的星体。一旦对准之后，就要以所给定的精度稳定在观测方向上。

无论是姿态稳定还是姿态控制，在刚体上都应有姿态稳定和控制系统。此系统应包含确定刚体相对于给定方位或给定坐标系的姿态角，并给出角偏差信号的姿态角传感器；根据角偏差信号形成控制信号的函数转换装置，以及改变刚体姿态角的控制执行机构等。因为陀螺装置的输出是欧拉角或其函数，传统的方法是用欧拉角或其函数来作为角偏差信号的。

但在捷联式控制系统中，利用计算机来建立基准，其输入信号不一定是欧拉角。原则上可以用任何运动学参数来作为误差信号，四元数是最方便的一种参数。

刚体姿态稳定与控制问题可以看成是体坐标系（固联坐标系）E 对某一给定坐标系 I 的变换与稳定问题。

给定坐标系有时被称为基准坐标系，通常有两种情况。

（1）基准坐标系 I 是惯性坐标系。

（2）基准坐标系 I 是动坐标系，它对惯性空间进行给定的旋转。

如果用欧拉角作为控制信号，设固连坐标系E为 $ox_1y_1z_1$；基准坐标系 I 为 $ox^*y^*z^*$，两坐标系关系，由三个欧拉角 $\Delta\varphi$，$\Delta\psi$，$\Delta\gamma$来确定。如图3.1所示。为了将坐标系 $ox_1y_1z_1$ 转换到

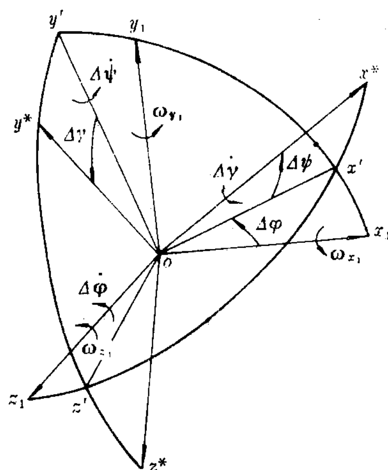


图 3.1　固连坐标系E和基准坐标系I关系图

$ox^*y^*z^*$，可以选择 $-k_1\Delta\gamma$、$-k_2\Delta\psi$、$-k_3\Delta\varphi$作为误差信号，则需在ox^*，oy'，oz_1三个方向进行控制才能消除误差，而控制信号往往是通过作用在刚体上的外力矩来实现的。在外力矩作用下，设E相对于I的旋转角速度为ω，由控制而产生的角速度为$\Delta\dot{\varphi}$、$\Delta\ddot{\psi}$、$\Delta\dot{\gamma}$，则

$$\omega=\Delta\dot{\varphi}+\Delta\dot{\psi}+\Delta\dot{\gamma} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases}\Delta\dot{\varphi}=\Delta\dot{\varphi}_{\overline{oz_1}} \\ \Delta\dot{\psi}=\Delta\dot{\psi}_{\overline{oy'}}=-\Delta\dot{\psi}\sin\Delta\varphi_{\overline{ox}_1}+\Delta\dot{\psi}\cos\Delta\varphi_{\overline{oy}_1} \\ \Delta\dot{\gamma}=\Delta\dot{\gamma}_{\overline{ox}^*}=\Delta\dot{\gamma}\cos\Delta\varphi\cos\Delta\psi_{\overline{ox_1}}+\Delta\dot{\gamma}\cos\Delta\psi\sin\Delta\varphi_{\overline{oy_1}} \\ \qquad -\Delta\dot{\gamma}\sin\Delta\psi_{\overline{oz_1}}\end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases}\omega_{x_1}=-\Delta\dot{\psi}\sin\Delta\varphi+\Delta\dot{\gamma}\cos\Delta\varphi\sin\Delta\psi \\ \omega_{y_1}=\Delta\dot{\psi}\cos\Delta\varphi+\Delta\dot{\gamma}\sin\Delta\varphi\cos\Delta\psi \\ \omega_{z_1}=\Delta\dot{\phi}-\Delta\dot{\gamma}\sin\Delta\psi\end{cases} \tag{3.3}$$

故

$$\begin{cases}\dfrac{d\Delta\varphi}{dt}=\omega_{z_1}+(\omega_{x_1}\cos\Delta\varphi+\omega_{y_1}\sin\Delta\varphi)\operatorname{tg}\Delta\psi \\ \dfrac{d\Delta\psi}{dt}=-\omega_{x_1}\sin\Delta\varphi+\omega_{y_1}\cos\Delta\varphi \\ \dfrac{d\Delta\gamma}{dt}=\dfrac{\omega_{x_1}\cos\Delta\varphi+\omega_{y_1}\sin\Delta\varphi}{\cos\Delta\psi}\end{cases} \tag{3.4}$$

解(3.4)式，即可求出在控制过程中 $\Delta\varphi$、$\Delta\psi$、$\Delta\gamma$ 的变化，当 $\Delta\varphi=\Delta\dot{\psi}=\Delta\gamma=0$时，姿态控制结束。

由图3.1可以看出，如果外力矩是作用在 $\boldsymbol{ox}^*$, $\boldsymbol{oy}'$, $\boldsymbol{oz}_1$三个方向上，则不会产生交联影响。在外力矩作用下，欧拉角迅速衰减，直至两坐标系重合，实际上外力矩是在$\boldsymbol{ox}_1$, $\boldsymbol{oy}_1$, $\boldsymbol{oz}_1$方向上，则产生交联影响。例如在$\boldsymbol{oy}_1$方向上产生力矩，则ω_{y_1}变化，不仅使$\Delta\psi$减小，且引起$\Delta\gamma$、$\Delta\varphi$变化，引起了交联。所以利用欧拉角$\Delta\varphi$、$\Delta\psi$、$\Delta\gamma$作为误差信号，存在控制误差稳定性问题。已经证明，利用欧拉角作为误差信号是渐近稳定的。

除利用欧拉角作为误差信号外，还可以用方向余弦来作为控制信号，例如当探测器固连在二自由度支架上，如图 3.2 所示，ox_1 为探测器轴，ox^* 为需要方向，由于支架是二自由度的，其输出信号只能是方向余弦$e_2\cdot i_1$和 $e_3\cdot i_1$. 如欲得到方向余弦 $e_1\cdot i_1$，则需在另一轴上安装相同的装置。当探测器敏感轴不对准需要方向ox^*时，绕oy_1轴和oz_1轴旋转，给出相应的信号$f_1(e_2\cdot i_1)$、$f_2(e_3\cdot i_1)$，使敏感器对准需要方向。因为一个测量装置，不能给出绕对准轴的角偏差分量，因而不能提供角偏差的全部信息，只能用于定向问题，如果需要定位，则需有两个以上不共面的这样的装置。

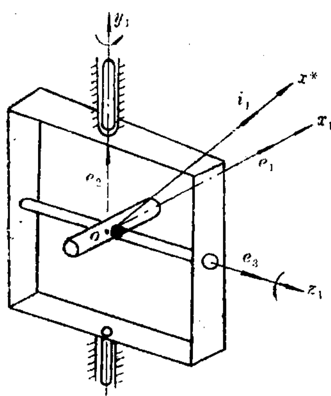


图 3.2　固连在二自由度陀螺上的探测器示意图

如果用e_1、e_2、e_3表示固连坐标系 $ox_1y_1z_1$ 三个轴向的单位矢量，i_1、i_2、i_3 表示需要坐标系 $ox^*y^*z^*$ 三个轴向的单位矢量，则其方向余弦阵

$$\begin{bmatrix} e_1\cdot i_1, & e_2\cdot i_1, & e_3\cdot i_1 \\ e_1\cdot i_2, & e_2\cdot i_2, & e_3\cdot i_2 \\ e_1\cdot i_3, & e_2\cdot i_3, & e_3\cdot i_3 \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2, & 2(q_1q_2+q_0q_3), & 2(q_1q_3-q_0q_2) \\ 2(q_1q_2-q_0q_3), & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2, & 2(q_2q_3+q_0q_1) \\ 2(q_1q_3+q_0q_2), & 2(q_2q_3-q_0q_1), & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi\cos\Delta\psi, & \cos\Delta\psi\sin\Delta\varphi, & -\sin\Delta\psi \\ \sin\Delta\gamma\sin\Delta\psi\cos\Delta\varphi - \sin\Delta\gamma\sin\Delta\varphi, & \sin\Delta\gamma\sin\Delta\psi\sin\Delta\varphi + \cos\Delta\gamma\cos\Delta\varphi, & \sin\Delta\gamma\cos\Delta\psi \\ \cos\Delta\gamma\sin\Delta\psi\cos\Delta\psi + \sin\Delta\gamma\sin\Delta\varphi, & \cos\Delta\gamma\sin\Delta\psi\sin\Delta\varphi - \sin\Delta\gamma\cos\Delta\varphi, & \cos\Delta\gamma\cos\Delta\psi \end{pmatrix} \tag{3.5}
$$

如果取方向余弦

$$
\begin{cases} e_2\cdot i_1=\cos\Delta\psi\sin\Delta\varphi=2(q_1q_2+q_0q_3) \\ -e_3\cdot i_1=\sin\Delta\psi=-2(q_1q_3-q_0q_2) \\ e_3\cdot i_2=\sin\Delta\gamma\cos\Delta\psi=2(q_2q_3+q_0q_1) \end{cases} \tag{3.6}
$$

作为控制信号，当两坐标系接近时，$\Delta\varphi\to0$，$\Delta\psi\to0$，$\Delta\gamma\to0$；$q_0\to1$，$q_1\to0$，$q_2\to0$，$q_3\to0$．故用(3.6)式作为控制信号，当误差量很小时

$$
e_2\cdot i_1\approx\Delta\varphi\approx2q_0q_3;\quad -e_3\cdot i_1\approx\Delta\psi=2q_0q_2;\quad e_3\cdot i_2\approx\Delta\gamma\approx2q_0q_1 \tag{3.7}
$$

可以看出，当误差角较小时，利用欧拉角，方向余弦和四元数作为误差信号，三者是一致的，且知q_1对应于$\Delta\gamma$；q_2对应于$\Delta\psi$；q_3对应于$\Delta\varphi$．

§2　四元数在定向控制中的应用

定向问题与定位问题不同，定向问题不需要使两坐标系重合，只要求使刚体某一轴指向某一给定方向。例如要求卫星上的探测器敏感轴指向行星、太阳、或某一恒星等方向。原则上只要求两个控制通道。我们知道，姿态控制系统可以实现三个通道的控制，因此在定向控制时，可以附加一个条件，来满足

某些特殊的要求，以下研究两个满足某附加条件的定向控制问题。

一、保证在定向过程中转动角速度最小的定向控制

为了使研究问题简化，设需要方向对惯性空间固定，如图3.3，ox^*为需要对准的方向，此方向对惯性空间固定。如果选择固连坐标系$ox_1y_1z_1$，使敏感轴在ox_1方向上，则控制的目的即是将ox_1轴转至ox^*方向。

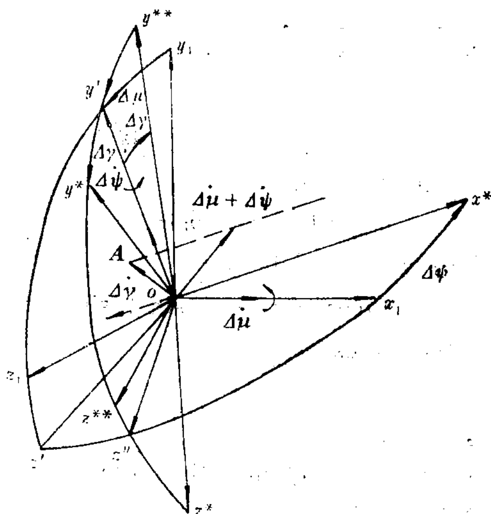


图 3.3　转动角速度最小的定向控制示意图

首先研究用欧拉角控制的情况。选择欧拉角，先绕ox_1轴转$\Delta\mu$角，使z_1转至由ox_1和ox^*所确定的平面，即oz'，再绕oy'轴转$\Delta\psi$角，将ox_1转至ox^*。此时，相对转动角速度Ω是将$ox_1y_1z_1$转至$ox^*y'z''$的转动角速度$\Delta\dot{\mu}$和$\Delta\dot{\psi}$之和

$$\Omega = \Delta\dot{\mu} + \Delta\dot{\psi} \tag{3.8}$$

此角速度在x_1oy'平面内，通常不垂直于ox^*。如果过$\boldsymbol{\Omega}$矢量的端点作ox^*的平行线，则必有一矢量$\boldsymbol{A}$垂直于ox^*，为最小旋转速度，为了得到最小旋转速度$\boldsymbol{A}$，必须沿$-ox^*$方向旋转$\Delta\dot{\boldsymbol{\gamma}}$，如图3.3所示，此时相对转动角速度

$$\boldsymbol{\Omega}=\Delta\dot{\boldsymbol{\mu}}+\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}+\Delta\dot{\boldsymbol{\gamma}} \tag{3.9}$$

因为当$\boldsymbol{\Omega}$垂直于ox^*时，需要转动的相对角速度最小，由此条件可以确定$\Delta\dot{\gamma}$与$\Delta\dot{\psi}$、$\Delta\dot{\mu}$之关系，此时

$$(\Delta\dot{\boldsymbol{\mu}}+\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}+\Delta\dot{\boldsymbol{\gamma}})\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{\gamma}}=0 \tag{3.10}$$

即
$$(\Delta\dot{\boldsymbol{\mu}}\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{\gamma}})+(\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{\gamma}})+\Delta\dot{\gamma}^2=0 \tag{3.11}$$

因

$$\begin{cases}\Delta\dot{\boldsymbol{\mu}}=\Delta\dot{\mu}\overline{ox_1}=\Delta\dot{\mu}\cos\Delta\psi\overline{ox^*}+\Delta\dot{\mu}\sin\Delta\psi\sin\Delta\gamma\overline{oy^*}\\ \qquad +\Delta\dot{\mu}\sin\Delta\psi\cos\Delta\gamma\overline{oz^*}\\ \Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}=\Delta\dot{\psi}\overline{oy'}=\Delta\dot{\psi}\cos\Delta\mu\overline{oy_1}+\Delta\dot{\psi}\sin\Delta\mu\overline{oz_1}\\ \qquad =\Delta\dot{\psi}\cos\Delta\gamma\overline{oy^*}-\Delta\dot{\psi}\sin\Delta\gamma\overline{oz^*}\\ \Delta\dot{\boldsymbol{\gamma}}=\Delta\dot{\gamma}\overline{ox^*}=\Delta\dot{\gamma}\cos\Delta\psi\overline{ox_1}+\Delta\dot{\gamma}\sin\Delta\psi\sin\Delta\mu\overline{oy_1}\\ \qquad -\Delta\dot{\gamma}\sin\Delta\psi\cos\Delta\mu\overline{oz_1}\end{cases} \tag{3.12}$$

代入(3.11)式，则得：

$$\Delta\dot{\mu}\Delta\dot{\gamma}\cos\Delta\psi+\Delta\dot{\psi}\Delta\dot{\gamma}\sin\Delta\psi\sin\Delta\mu\cos\Delta\mu$$
$$-\Delta\dot{\psi}\Delta\dot{\gamma}\sin\Delta\psi\sin\Delta\mu\cos\Delta\mu+\Delta\dot{\gamma}^2=0$$

故
$$\Delta\dot{\gamma}=-\Delta\dot{\mu}\cos\Delta\psi \tag{3.13}$$

设相对速度$\boldsymbol{\Omega}$在$ox_1y_1z_1$各轴上分量为Ω_{x_1}、Ω_{y_1}、Ω_{z_1}，则

$$\begin{cases}\Omega_{x_1}=\Delta\dot{\mu}\sin^2\Delta\psi\\ \Omega_{y_1}=\Delta\dot{\psi}\cos\Delta\mu-\Delta\dot{\mu}\sin\Delta\psi\cos\Delta\psi\sin\Delta\mu\\ \Omega_{z_1}=\Delta\dot{\psi}\sin\Delta\mu+\Delta\dot{\mu}\sin\Delta\psi\cos\Delta\psi\cos\Delta\mu\end{cases} \tag{3.14}$$

而
$$\Omega^2=\Delta\dot{\psi}^2+\Delta\dot{\mu}^2\sin^2\Delta\psi \tag{3.15}$$

故得欧拉方程

$$
\begin{cases}
\Delta\dot{\mu}=\dfrac{\Omega_{x_1}}{\sin^2\Delta\psi} \\
\Delta\dot{\psi}=\Omega_{y_1}\cos\Delta\mu+\Omega_{z_1}\sin\Delta\mu \\
\Delta\dot{\gamma}=-\Omega_{x_1}\dfrac{\cos\Delta\psi}{\sin^2\Delta\psi}
\end{cases}
\tag{3.16}
$$

如果 Ω_{x_1}、Ω_{y_1}、Ω_{z_1}已知，给定起始条件 $\Delta\mu_0$、$\Delta\psi_0$、$\Delta\gamma_0$，积分(3.16)式即可求出保证转动角速度最小时的$\Delta\mu$、$\Delta\mu$、$\Delta\gamma$ 的变化。

其次研究用四元数控制的情况。设将 $ox_1y_1z_1$ 转换成 $ox^*y^*z^*$ 的四元数为 q，为了保证旋转角速度最小，应使Ω垂直于ox^*，故若将Ω投影在$ox^*y^*z^*$上，则

$$\Omega_{x^*}=0$$

故

$$q_1=0 \tag{3.17}$$

$$\dot{q}_1=0 \tag{3.18}$$

$$q^T=(q_0,0,q_2,q_3)=\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ 0,\frac{\Omega_{y^*}}{\Omega}\sin\frac{\alpha}{2},\frac{\Omega_{z^*}}{\Omega}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

四元数方程为

$$\dot{q}=\frac{1}{2}q*\Omega_*=\frac{1}{2}\Omega_1*q \tag{3.19}$$

通常将Ω投影在$ox_1y_1z_1$坐标系上，则

$$
\begin{cases}
\dot{q}_0=-\dfrac{1}{2}(\Omega_{y_1}q_2+\Omega_{z_1}q_3) \\
\dot{q}_1=\dfrac{1}{2}(\Omega_{x_1}q_0-\Omega_{z_1}q_2+\Omega_{y_1}q_3)=0 \\
\dot{q}_2=\dfrac{1}{2}(\Omega_{y_1}q_0-\Omega_{x_1}q_3) \\
\dot{q}_3=\dfrac{1}{2}(\Omega_{z_1}q_0+\Omega_{x_1}q_2)
\end{cases}
\tag{3.20}
$$

由(3.20)式第二式可求出在保证旋转角速度最小情况下四元数与所选欧拉角之间的关系，此时，由(3.20)式第二式

$$\Omega_{x_1}q_0-\Omega_{z_1}q_2+\Omega_{y_1}q_3=0$$

即 $$q_0\Delta\dot{\mu}\sin^2\Delta\psi-q_2(\Delta\dot{\psi}\sin\Delta\mu+\Delta\dot{\mu}\sin\Delta\psi\cos\Delta\psi\cos\Delta\mu)$$
$$+q_3(\Delta\dot{\psi}\cos\Delta\mu-\Delta\dot{\mu}\sin\Delta\psi\cos\Delta\psi\sin\Delta\mu)=0 \tag{3.21}$$

如果取

$$\begin{cases}q_2=a\cos\Delta\mu\\ q_3=a\sin\Delta\mu\end{cases} \tag{3.22}$$

式中 a 为待定系数，则

$$q_0\sin\Delta\psi-a\cos\Delta\psi=0$$

故 $$a=q_0\frac{\sin\Delta\psi}{\cos\Delta\psi} \tag{3.23}$$

代入(3.22)式，则得：

$$q_2=q_0\operatorname{tg}\Delta\psi\cos\Delta\mu$$
$$q_3=q_0\operatorname{tg}\Delta\psi\sin\Delta\mu$$

又因 $$q_0^2+q_2^2+q_3^2=1$$

故

$$\begin{cases}q_0=\cos\Delta\psi\\ q_1=0\\ q_2=\sin\Delta\psi\cos\Delta\mu\\ q_3=\sin\Delta\psi\sin\Delta\mu\end{cases} \tag{3.24}$$

二、保证在定向过程中不绕ox_1轴滚动的定向控制

如图3.4所示，ox^* 为需要对准的方向。为了使 ox_1指向 ox^*，并保证在定向过程中不绕 ox_1轴滚动。这样来选择欧拉角，先绕 oz_1轴转$\Delta\varphi$角，将 ox_1转至由 oz_1与ox^*所确定的平面内，即ox'.

$$\Delta\dot{\varphi}=\Delta\varphi\overline{oz_1} \tag{3.25}$$

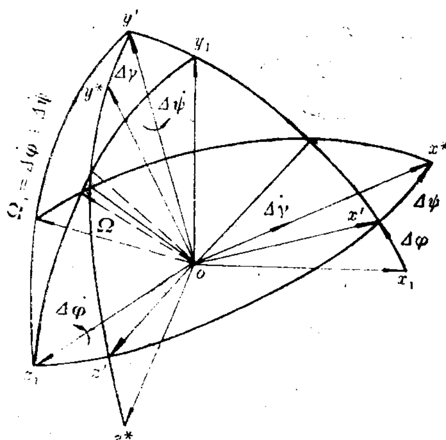


图 3.4 不绕 ox_1轴滚动的定向控制示意图

再绕$\boldsymbol{oy}'$轴转$\Delta\psi$角，将$\boldsymbol{ox}'$转至$\boldsymbol{ox}^*$.

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}=\Delta\dot\psi_{\overline{oy'}} \tag{3.26}$$

此时，已将$\boldsymbol{ox}_1$转至$\boldsymbol{ox}^*$，相对转动角速度

$$\boldsymbol{\Omega}_1=\Delta\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}} \tag{3.27}$$

此相对角速度矢量在$y'oz_1$平面内，通常不垂直于$\boldsymbol{ox}_1$。要在转动过程中不绕$\boldsymbol{ox}_1$滚动，即$\Omega_{x_1}=0$，应绕$\boldsymbol{ox}^*$轴转$\Delta\gamma$角.

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\gamma}}=\Delta\dot\gamma_{\overline{ox}^*} \tag{3.28}$$

使合成角速度$\boldsymbol{\Omega}$在y_1oz_1平面内，则$\boldsymbol{\Omega}$垂直于$\boldsymbol{ox}_1$.

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Omega}_1+\Delta\dot{\boldsymbol{\gamma}}=\Delta\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}+\Delta\dot{\boldsymbol{\gamma}} \tag{3.29}$$

$$\begin{cases}\Omega_{x_1}=\Delta\dot\gamma\cos\Delta\varphi\cos\Delta\psi-\Delta\dot\psi\sin\Delta\varphi=0\\ \Omega_{y_1}=\Delta\dot\gamma\sin\Delta\varphi\cos\Delta\psi+\Delta\dot\psi\cos\Delta\varphi\\ \Omega_{z_1}=\Delta\dot\varphi-\Delta\dot\gamma\sin\Delta\psi\end{cases} \tag{3.30}$$

由(3.30)式可得欧拉方程

$$\begin{cases} \Delta\dot{\psi}=\Omega_{y_1}\cos\Delta\varphi \\ \Delta\dot{\varphi}=\Omega_{z_1}+\Omega_{y_1}\sin\Delta\varphi\,\mathrm{tg}\Delta\psi \\ \Delta\dot{\gamma}=\Omega_{y_1}\dfrac{\sin\Delta\varphi}{\cos\Delta\psi} \end{cases} \tag{3.31}$$

如果设保证不绕ox_1滚动，而将$ox_1y_1z_1$转至$ox^*y^*z^*$的四元数为λ，则因

$$\Omega_{x_1}=0 \tag{3.32}$$

则

$$\lambda_1=0 \tag{3.33}$$

$$\dot{\lambda}_1=0 \tag{3.34}$$

$$\lambda^T=(\lambda_0,0,\lambda_2,\lambda_3)=\left(\cos\frac{\beta}{2},\ 0\ ,\frac{\Omega_{y_1}}{\Omega}\sin\frac{\beta}{2},\frac{\Omega_{z_1}}{\Omega}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

四元数方程为

$$\dot{\lambda}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_1*\lambda=\frac{1}{2}\lambda*\boldsymbol{\Omega}_* \tag{3.35}$$

如果将$\boldsymbol{\Omega}$投影在$ox_1y_1z_1$坐标系上，则

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_0=-\dfrac{1}{2}(\Omega_{y_1}\lambda_2+\Omega_{z_1}\lambda_3) \\ \dot{\lambda}_1=\dfrac{1}{2}(-\Omega_{z_1}\lambda_2+\Omega_{y_1}\lambda_3)=0 \\ \dot{\lambda}_2=\dfrac{1}{2}\Omega_{y_1}q_0 \\ \dot{\lambda}_3=\dfrac{1}{2}\Omega_{z_1}q_0 \end{cases} \tag{3.36}$$

为了解出四元数λ与欧拉角的关系，往往利用$\boldsymbol{\Omega}_*$方程，此时

$$\dot{\lambda}=\frac{1}{2}\lambda*\boldsymbol{\Omega}_* \tag{3.37}$$

$$\begin{cases} \Omega_x{}^* = \Delta\dot{\gamma} - \Delta\dot{\varphi}\sin\Delta\psi \\ \Omega_y{}^* = \Delta\dot{\varphi}\sin\Delta\gamma\cos\Delta\psi + \Delta\dot{\psi}\cos\Delta\gamma \\ \Omega_z{}^* = \Delta\dot{\varphi}\cos\Delta\gamma\cos\Delta\psi - \Delta\dot{\psi}\sin\Delta\gamma \end{cases} \tag{3.38}$$

当$\lambda_1=0$，$\dot{\lambda}_1=0$时

$$\Omega_x{}^*\lambda_0 + \Omega_z{}^*\lambda_2 - \Omega_y{}^*\lambda_3 = 0 \tag{3.39}$$

将(3.38)式代入(3.39)式，则

$$\lambda_0(\Delta\dot{\gamma} - \Delta\dot{\varphi}\sin\Delta\psi) + \lambda_2(\Delta\dot{\varphi}\cos\Delta\gamma\cos\Delta\psi - \Delta\dot{\psi}\sin\Delta\gamma)$$
$$- \lambda_3(\Delta\dot{\varphi}\cos\Delta\gamma\cos\Delta\psi - \Delta\dot{\psi}\cos\Delta\gamma) = 0 \tag{3.40}$$

由(3.30)式第一式

$$\Delta\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{tg}\Delta\varphi}{\cos\Delta\psi}\Delta\dot{\psi} \tag{3.41}$$

代入(3.40)式，则

$$\Delta\dot{\psi}\left(\frac{\sin\Delta\varphi}{\cos\Delta\varphi\cos\Delta\psi}\lambda_0 - \lambda_2\sin\Delta\gamma - \lambda_3\cos\Delta\gamma\right)$$
$$+ \Delta\dot{\varphi}(-\lambda_0\sin\Delta\psi + \lambda_2\cos\Delta\gamma\cos\Delta\psi$$
$$- \lambda_3\sin\Delta\gamma\cos\Delta\psi) = 0 \tag{3.42}$$

故

$$\begin{cases} \lambda_2\sin\Delta\gamma + \lambda_3\cos\Delta\gamma = \lambda_0\dfrac{\sin\Delta\varphi}{\cos\Delta\varphi\cos\Delta\psi} \\ \lambda_2\cos\Delta\gamma\cos\Delta\psi - \lambda_3\sin\Delta\gamma\cos\Delta\psi = \lambda_0\sin\Delta\psi \end{cases}$$

故

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_0\left(\dfrac{\sin\Delta\varphi\sin\Delta\gamma + \cos\Delta\varphi\cos\Delta\gamma\sin\Delta\psi}{\cos\Delta\varphi\cos\Delta\psi}\right) \\ \lambda_3 = -\lambda_0\left(\dfrac{\sin\Delta\gamma\sin\Delta\psi\cos\Delta\varphi - \sin\Delta\varphi\cos\Delta\gamma}{\cos\Delta\varphi\cos\Delta\psi}\right) \end{cases} \tag{3.43}$$

因 $\lambda_0^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$

故 $\lambda_0 = \cos\Delta\varphi\cos\Delta\psi$

故知在无滚动情况下，四元数和欧拉角关系为

$$\begin{cases}\lambda_0 = \cos\Delta\varphi\cos\Delta\psi \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \cos\Delta\varphi\sin\Delta\psi\cos\Delta\gamma + \sin\Delta\varphi\sin\Delta\gamma \\ \lambda_3 = \sin\Delta\varphi\cos\Delta\gamma - \cos\Delta\varphi\sin\Delta\psi\sin\Delta\gamma\end{cases} \tag{3.44}$$

§3 对惯性空间定位控制的稳定性问题

如前两节所述，无论是姿态稳定还是姿态控制，必须选定误差信号及其控制规律。与欧拉角一样，四元数作为误差信号也有两种组成形式，即用四元数及其函数作为误差信号和用四元数表示的方向余弦及其函数来组成误差信号。

用欧拉角作为控制信号的控制稳定性问题，已经得到证明，这里不再叙述。利用四元数作为误差信号，也存在控制稳定性问题，需要加以研究。

设将固连坐标系$E(ox_1y_1z_1)$转换到惯性坐标系$I(ox^*y^*z^*)$的四元数用λ来表示，则λ与第二章§2.2节中的四元数q相反，那里的q是表示将I转换到E的旋转四元数。坐标系E的绝对角速度为Ω，它是根据姿态角传感器的信号所形成的修正角速度。将E转到I，故四元数方程为

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2}\Omega_E * \lambda = \frac{1}{2}\lambda * \Omega_I \tag{3.45}$$

采用将角速度投影到固连坐标系的方程，则

$$\begin{cases}2\dot{\lambda}_0 = -\lambda_1\Omega_{x_1} - \lambda_2\Omega_{y_1} - \lambda_3\Omega_{z_1} \\ 2\dot{\lambda}_1 = \lambda_0\Omega_{x_1} - \lambda_2\Omega_{z_1} + \lambda_3\Omega_{y_1} \\ 2\dot{\lambda}_2 = \lambda_0\Omega_{y_1} + \lambda_1\Omega_{z_1} - \lambda_3\Omega_{x_1} \\ 2\dot{\lambda}_3 = \lambda_0\Omega_{z_1} - \lambda_1\Omega_{y_1} + \lambda_2\Omega_{x_1}\end{cases} \tag{3.46}$$

对两种组成信号的方法，分别研究定位稳定性的充分条件。

一、用四元数分量及其函数组成误差信号

引入辽普诺夫函数

$$W = 1 - \lambda_0^2 = \frac{1}{2}[(1-\lambda_0^2)+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2] \quad (3.47)$$

此函数当E、I 重合时为零，对应的四元数为(1, 0, 0, 0)；当E、I不重合时为正，故函数W是正定的。其导数

$$\dot{W} = -2\lambda_0\lambda_0 = \lambda_0\lambda_1\Omega_{x_1}+\lambda_0\lambda_2\Omega_{y_1}+\lambda_0\lambda_3\Omega_{z_1} \quad (3.48)$$

如果采用线性修正，则取

$$\Omega_{x_1} = -K_1\lambda_0\lambda_1;\quad \Omega_{y_1} = -K_2\lambda_0\lambda_2;\quad \Omega_{z_1} = -K_3\lambda_0\lambda_3 \quad (3.49)$$

当$K_i>0$ 时，将(3.49)式代入(3.48)式，则

$$\dot{W} = -(K_1\lambda_0^2\lambda_1^2+K_2\lambda_0^2\lambda_2^2+K_3\lambda_0^2\lambda_3^2) \quad (3.50)$$

故$\dot{W}$是负定的，由辽普诺夫运动稳定性定理，系统是稳定的，在λ变化的整个区间（$\lambda_0\neq 0$）渐近收敛于平衡位置$\lambda=(1,0,0,0)$。

当$\lambda_0=0$时，$|\Omega|=0$，$\dot{W}$变为零，是非稳定的平衡位置。因为如果设$K_i=K,(i=1,2,3)$，则

$$\dot{W} = -K\lambda_0^2(1-\lambda_0^2) = -KW(1-W)$$

故

$$W = \frac{W_0 e^{-Kt}}{1+W_0(e^{-Kt}-1)} \quad (3.51)$$

可以看出，对于初值$W_0<1$来说，在$K>0$时，$W(t)\to 0$，其收敛速度依赖于修正系数K。显然，除$\lambda_0=0$外，W都不能是1，而当$W_0=1$时，$W(t)=1$。

设存在一无穷小扰动$\in$，若

$$W_0 = 1-\in$$

则
$$W=\frac{(1-\in)e^{-Kt}}{1+(1-\in)(e^{-Kt}-1)}=\frac{(1-\in)e^{-Kt}}{\in+(1-\in)e^{-Kt}}$$
$$=\frac{1-\in}{(1-\in)+\in e^{Kt}}\approx\frac{1}{1+\in e^{Kt}}$$

当 $t\to\infty$时，$W\to 0$，故知$\lambda_0=0$，$W_0=1$时是非稳定结点。

如果采用非线性修正，设取

$$\begin{cases}\Omega_{x_1}=-K_1F_1(\lambda_0)\phi_1(\lambda_1)\\ \Omega_{y_1}=-K_2F_2(\lambda_0)\phi_2(\lambda_2)\\ \Omega_{z_1}=-K_3F_3(\lambda_0)\phi_3(\lambda_3)\end{cases}\tag{3.52}$$

只要式中函数$F_i(\lambda_0)$和$\phi_i(\lambda_i)$满足条件

$$\lambda_0F_i(\lambda_0)>0;\quad \lambda_i\phi_i(\lambda_i)>0\tag{3.53}$$

则
$$\begin{aligned}\dot{W}=-[&K_1\lambda_0\lambda_1F_1(\lambda_0)\phi_1(\lambda_1)\\&+K_2\lambda_0\lambda_2F_2(\lambda_0)\phi_2(\lambda_2)\\&+K_3\lambda_0\lambda_3F_3(\lambda_0)\phi_3(\lambda_3)]\end{aligned}$$

当$K_i>0$时，在给定条件(3.53)时，$\dot{W}$是负定的，只要$\lambda_0\neq0$，都能保证控制过程的渐近稳定性。当$\lambda_0=0$时，$W_0=1$，与线性修正规律一样，此点亦是非稳定结点。

二、用四元数所表示的方向余弦进行控制

如图3.5，考虑到(3.5)式，取

$$\begin{cases}\Omega_{x_1}=-\dfrac{K_1}{2}(-e_2\cdot i_3)=-K_1(\lambda_0\lambda_1-\lambda_2\lambda_3)\\[2ex] \Omega_{y_1}=-\dfrac{K_2}{2}(e_1\cdot i_3)=-K_2(\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3)\\[2ex] \Omega_{z_1}=-\dfrac{K_3}{2}(e_2\cdot i_1)=-K_3(\lambda_0\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)\end{cases}$$

(3.54)

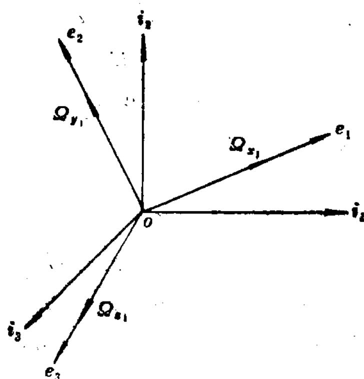


图 3.5 坐标系E,I示意图

或
$$\Omega_{z_1}=-\frac{K_3}{2}(-e_1\cdot i_2)=-K_3(\lambda_0\lambda_3-\lambda_1\lambda_2) \tag{3.55}$$

引入辽普诺夫函数

$$W=\alpha(1-\lambda_0^2)+\beta\lambda_3^2+\gamma\lambda_2^2+\delta\lambda_1^2 \tag{3.56}$$

或中α、β、γ、δ是任意正数，则W是正定的。仅在平衡位置（1，0,0,0)变为零。

微分(3.56)式，则得：

$$\dot{W}=-2\alpha\lambda_0\dot{\lambda}_0+2\beta\lambda_3\dot{\lambda}_3+2\gamma\lambda_2\dot{\lambda}_2+2\delta\lambda_1\dot{\lambda}_1 \tag{3.57}$$

由(3.46)式，且采用线性修正(3.54)式，则得：

$$\begin{aligned}-\dot{W}=&K_1(\alpha+\delta)\lambda_0^2\lambda_1^2+K_2(\alpha+\gamma)\lambda_0^2\lambda_2^2\\&+K_3(\alpha+\beta)\lambda_0^2\lambda_3^2+K_1(\gamma-\beta)\lambda_2^2\lambda_3^2\\&+K_2(\delta-\beta)\lambda_1^2\lambda_3^2\pm K_3(\gamma-\delta)\lambda_1^2\lambda_2^2\\&+[K_1(\beta-\gamma-\alpha-\delta)+K_2(\alpha+\gamma-\beta+\delta)\\&+K_3(\gamma-\delta\pm\alpha\pm\beta)]\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned} \tag{3.58}$$

式中“+”号对应于Ω_{z_1}采用(3.54)式，“-”号对应于Ω_{z_1}采用(3.55)式。可以看出，欲使W是负函数，必须满足条件

$$K_i>0,\ \gamma>\beta,\ \delta>\beta,\ \pm(\gamma-\delta)\geqslant 0 \tag{3.59}$$

式中符号(±)分别对应于Ω_{z1}所选择的公式。

但仅仅满足条件(3.59)，并不能保证在λ_i变化的整个区间，$\dot{W}$都是负定的，下面我们将证明通过α、β、γ、δ的选择，可使$\dot{W}$在λ_i变化的整个区间是负定的。

将(3.58)式写成

$$\begin{aligned}-\dot{W}=&[K_1(\alpha+\delta)\lambda_0^2\lambda_1^2+K_1(\nu-\beta)\lambda_2^2\lambda_3^2\\&+a\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3]+[K_2(\alpha+\gamma)\lambda_0^2\lambda_2^2\\&+K_2(\delta-\beta)\lambda_1^2\lambda_3^2+b\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3]\\&+[K_3(\alpha+\beta)\lambda_0^2\lambda_3^2\pm K_3(\gamma-\delta)\lambda_1^2\lambda_2^2\\&+c\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3]\end{aligned}\tag{3.60}$$

式中

$$\begin{aligned}a+b+c=&K_1(\beta-\gamma-\alpha-\delta)\\&+K_2(\alpha+\gamma-\beta+\delta)\\&+K_3(\gamma-\delta\pm\alpha\pm\beta)\end{aligned}\tag{3.61}$$

为了使这三个二次型都是正定的，必须满足条件

$$\begin{cases}A^2=4K_1^2(\alpha+\delta)(\gamma-\beta)>a^2>0\\B^2=4K_2^2(\alpha+\gamma)(\delta-\beta)>b^2>0\\C^2=\pm4K_3^2(\alpha+\beta)(\gamma-\delta)>c^2>0\end{cases}\tag{3.62}$$

式中A^2，B^2，C^2都是实数，故

$$\begin{cases}-A\leqslant a\leqslant A\\-B\leqslant b\leqslant B\\-C\leqslant c\leqslant C\end{cases}\tag{3.63}$$

如果以a、b、c为轴，则(3.63)式为一长方体，如图3.6所示，在长方体内任何a、b、c值均能使(3.62)式成立，考虑到关系式(3.61)，作平面

$$\begin{aligned}a+b+c=&K_1(\beta-\gamma-\alpha-\delta)+K_2(\alpha+\gamma+\delta-\beta)\\&+K_3(\gamma-\delta\pm\alpha\pm\beta)=d\end{aligned}\tag{3.64}$$

与长方体相交之体内截平面上a、b、c均满足(3.62)式，即是

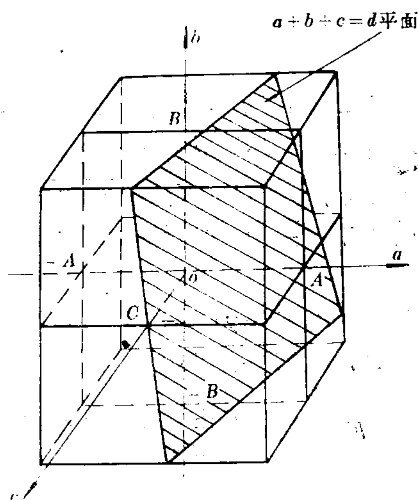


图 3.6 满足稳定条件的平面示意图

$$
\begin{aligned}
&-2K_1\sqrt{(\alpha+\delta)(\gamma-\beta)}-2K_2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\delta-\beta)}\\
&-2K_3\sqrt{\pm(\alpha+\beta)(\gamma-\delta)}\leqslant K_1(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)\\
&+K_2(\alpha+\gamma+\delta-\beta)+K_3(\gamma-\delta\pm\alpha\pm\beta)\\
\leqslant&2K_1\sqrt{(\alpha+\delta)(\gamma-\beta)}+2K_2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\delta-\beta)}\\
&+2K_3\sqrt{\pm(\alpha+\beta)(\gamma-\delta)}
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

由(3.65)式可得：

$$
\begin{cases}
-K_1[(\alpha+\delta)+(\gamma-\beta)-2\sqrt{(\alpha+\delta)(\gamma-\beta)}]\\
+K_2[(\alpha+\gamma)+(\delta-\beta)+2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\delta-\beta)}]\\
\pm K_3[(\alpha+\beta)\pm(\gamma-\delta)\pm2\sqrt{\pm(\alpha+\beta)(\gamma-\delta)}]\\
\geqslant0\\
K_1[(\alpha+\delta)+(\gamma-\beta)+2\sqrt{(\alpha+\delta)(\gamma-\beta)}]\\
-K_2[(\alpha+\gamma)+(\delta-\beta)-2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\delta-\beta)}]\\
\mp K_3[(\alpha+\beta)\pm(\gamma-\delta)\mp2\sqrt{\pm(\alpha+\beta)(\gamma-\delta)}]\\
\geqslant0
\end{cases}
\tag{3.66}
$$

即

$$\begin{cases}-K_1[\sqrt{\alpha+\delta}-\sqrt{\gamma-\beta}]^2+K_2[\sqrt{\alpha+\gamma}+\sqrt{\delta-\beta}]^2\\ \pm K_3[\sqrt{\alpha+\beta}\pm\sqrt{\pm(\gamma-\delta)}]^2\geqslant 0\\ K_1[\sqrt{\alpha+\delta}+\sqrt{\gamma-\beta}]^2-K_2[\sqrt{\alpha+\gamma}-\sqrt{\delta-\beta}]^2\\ \mp K_3[\sqrt{\alpha+\beta}\mp\sqrt{\pm(\gamma-\delta)}]^2\geqslant 0\end{cases} \tag{3.67}$$

如果选择 $\alpha+\delta=\gamma-\beta$； $\alpha+\gamma=\delta-\beta$，这与条件(3.59)是不矛盾的，此时由(3.67)式第一式得：

$$K_2\geqslant\mp K_3\frac{[\sqrt{\alpha+\beta}\pm\sqrt{\pm(\gamma-\delta)}]^2}{4(\alpha+\gamma)} \tag{3.68}$$

由(3.67)式第二个不等式得：

$$K_1\geqslant\pm K_3\frac{[\sqrt{\alpha+\beta}\mp\sqrt{\pm(\gamma-\delta)}]^2}{4(\alpha+\delta)} \tag{3.69}$$

式中(±)符号，分别对应于Ω_{z1}的不同公式。

对于Ω_{z1}的第一种情况，即(3.68)式取负号，(3.69)式取正号，则对于任何正数K_2、K_3，(3.68)式恒成立。对(3.69)式，如果能选出$\delta=\alpha+\gamma-\beta$，则

$$K_1\geqslant K_3\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{2(\alpha+\delta)};\ \ \beta\geqslant\alpha \tag{3.70}$$

如果选不出$\delta=\alpha+\gamma-\beta$，则仍用(3.69)式。

对于Ω_{z1}的第二种情况，即(3.68)式取正号，(3.69)式取负号，则对于任何正数K_1、K_3，(3.69)式恒成立。对(3.68)式，如果能选出$\delta=\alpha+\gamma-\beta$，则

$$K_2\geqslant K_3\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2(\alpha+\gamma)};\ \ \alpha\geqslant\beta \tag{3.71}$$

否则仍用(3.68)式。

(3.70)和(3.71)式，给出了K_1、K_2、K_3之间的关系。

可以看出，通过参数α、β、δ、γ的选择，总能使（3.66）式成立，即$\dot{W}$是负定的，故按方向余弦控制是渐近稳定的。

在本章第二节中，我们说过，两个通道的控制，就能完成定向控制；而三个通道的控制，才能完成定位控制。利用以上研究，可以证明这个问题。

以按四元数分量(3.49)式进行控制为例。

如果只进行单通道控制，则$K_1>0$，$K_2=K_3=0$，则辽普诺函数(3.47)式的导数

$$\dot{W}=-K_1\lambda_0^2\lambda_1^2 \tag{3.72}$$

当$\lambda_1=0$时，$\dot{W}=0$，显然这是控制消失的平衡位置，也即是说将坐标系E转换到坐标系I的有限转动矢量位于e_2e_3平面上。运动方程(3.46)的解，对应于这些位置中的任一位置。

如果进行两个通道的控制，设$K_1>0$；$K_2>0$；$K_3=0$，则

$$\dot{W}=-(K_1\lambda_0^2\lambda_1^2+K_2\lambda_0^2\lambda_2^2) \tag{3.73}$$

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，$\dot{W}=0$，相当于有限转动矢量指向e_3，这种位置中的任何一个位置都是平衡位置，不能达到定位的目的，故刚体对于惯性坐标系定位，必须使用三个通道控制。

§4 对以常角速度旋转坐标系定位的控制稳定性问题

除对惯性坐标系定位的情况外，通常遇到的是对旋转坐标系的定位。在卫星定位问题中，由于卫星或行星（例如地球）通常可以近似看成是以等角速度在轨道平面内运动。不失一般性，设$\boldsymbol{\omega}_0=\omega_0\boldsymbol{i}_3$，即需要坐标系$ox^*y^*z^*$沿$oz^*$方向以等角速度$\omega_0$旋转。设坐标系$ox_1y_1z_1$的修正角速度为$\boldsymbol{\Omega}=(\Omega_{x_1},\Omega_{y_1},\Omega_{z_1})$，当两坐标系重合时，必须使坐标系$ox_1y_1z_1$与$ox^*y^*z^*$

同样旋转，故还需使坐标系 $ox_1y_1z_1$ 具有附加速度 $\omega^*=\omega^*e_3=\omega_0e_3$，则坐标系$ox_1y_1z_1$的绝对角速度

$$\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\omega}^*=\Omega_{x_1}e_1'+\Omega_{y_1}e_2'+(\Omega_{z_1}+\omega^*)e_3' \qquad (3.74)$$

由图3.7，设两坐标系之间四元数为 λ，

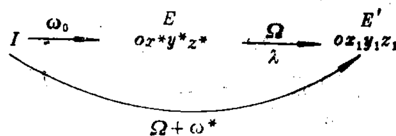


图 3.7

则
$$\lambda=\frac{1}{2}\lambda*(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\omega}^*)_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_0*\lambda \qquad (3.75)$$

即
$$\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}0, & -\Omega_{x_1}, & -\Omega_{y_1}, & -(\Omega_{z_1}+\omega^*)\\ \Omega_{x_1}, & 0, & \Omega_{z_1}+\omega^*, & -\Omega_{y_1}\\ \Omega_{y_1}, & -(\Omega_{z_1}+\omega^*), & 0, & \Omega_{x_1}\\ \Omega_{z_1}+\omega^*, & \Omega_{y_1}, & -\Omega_{x_1}, & 0\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.-\begin{bmatrix}0, & 0, & 0, & -\omega_0\\ 0, & 0, & -\omega_0, & 0\\ 0, & \omega_0, & 0, & 0\\ \omega_0, & 0, & 0, & 0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} \qquad (3.76)$$

如果取$\omega^*=\omega_0$，则

$$\begin{cases}2\lambda_0=-\lambda_1\Omega_{x_1}-\lambda_2\Omega_{y_1}-\lambda_3\Omega_{z_1}\\ 2\lambda_1=\lambda_0\Omega_{x_1}+\lambda_2\Omega_{z_1}-\lambda_3\Omega_{y_1}+2\lambda_2\omega_0\\ 2\lambda_2=\lambda_0\Omega_{y_1}-\lambda_1\Omega_{z_1}+\lambda_3\Omega_{x_1}-2\lambda_1\omega_0\\ 2\lambda_3=\lambda_0\Omega_{z_1}+\lambda_1\Omega_{y_1}-\lambda_2\Omega_{x_1}\end{cases} \qquad (3.77)$$

当修正角速度 $\Omega_{x_1}=\Omega_{y_1}=\Omega_{z_1}=0$ 时，由(3.77)式可以看出 λ_i的进动情况。

此时
$$\begin{cases}\dot{\lambda}_0=0, & \lambda_0(t)=\lambda_{00}\\ \dot{\lambda}_3=0, & \lambda_3(t)=\lambda_{30}\end{cases} \tag{3.78}$$

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=\lambda_2\omega_0\\ \dot{\lambda}_2=-\lambda_1\omega_0\end{cases} \tag{3.79}$$

故
$$\begin{cases}\lambda_1(t)=\lambda_{10}\cos\omega_0 t+\lambda_{20}\sin\omega_0 t\\ \lambda_2(t)=\lambda_{20}\cos\omega_0 t+\lambda_{10}\sin\omega_0 t\end{cases} \tag{3.80}$$

解(3.80)表示在没有修正量时，坐标系 $ox_1y_1z_1$相对于坐标系 $ox^*y^*z^*$ 运动的情况，在坐标系 $ox_1y_1z_1$上观察，其旋转轴在 oz_1 轴上，而在 $ox^*y^*z^*$上观察，其旋转轴在oz^*轴上，如图 3.8 所示。

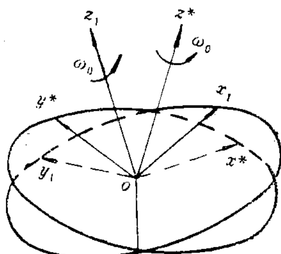


图 3.8 两坐标系相对运动情况示意图

当$\omega^*\neq\omega_0$时，如果$\Omega_{x_1}=\Omega_{y_1}=\Omega_{z_1}=0$，则

$$\begin{cases}\lambda_0=\lambda_{00}\cos\frac{1}{2}(\omega^*-\omega_0)t+\lambda_{30}\sin\frac{1}{2}(\omega^*-\omega_0)t\\ \lambda_3=\lambda_{30}\cos\frac{1}{2}(\omega^*-\omega_0)t+\lambda_{00}\sin\frac{1}{2}(\omega^*-\omega_0)t\\ \lambda_1=\lambda_{10}\cos\frac{1}{2}(\omega^*+\omega_0)t+\lambda_{20}\sin\frac{1}{2}(\omega^*+\omega_0)t\\ \lambda_2=\lambda_{20}\cos\frac{1}{2}(\omega^*+\omega_0)t+\lambda_{10}\sin\frac{1}{2}(\omega^*+\omega_0)t\end{cases} \tag{3.81}$$

两坐标系相对运动的情况与图3.8相类似。

由方程(3.77)可以看出，平衡位置(1，0，0，0)是方程当$\Omega_{x_1}=\Omega_{y_1}=\Omega_{z_1}$时的解。

在姿态修正过程中，如果选择$\omega^*=\omega_0$，可以证明按四元数分量进行控制和按方向余弦进行控制都能实现修正过程的渐近收敛。

与对惯性坐标系定位不同之处在于：对以常角速度旋转坐标系定位，不一定都需要三个独立的修正信号，以下分别来进行研究。

一、按四元数分量进行控制的情况

(1) 根据Ω_{x_1}，Ω_{y_1}两信号进行修正，即取$K_1>0$，$K_2>0$，$K_3=0$.

仍取辽普诺夫函数

$$W=1-\lambda_0^2=\frac{1}{2}[(1-\lambda_0^2)+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2] \tag{3.82}$$

其导数
$$\dot{W}=-2\lambda_0\dot{\lambda}_0=\lambda_0\lambda_1\Omega_{x_1}+\lambda_0\lambda_2\Omega_{y_1}+\lambda_0\lambda_3\Omega_{z_1} \tag{3.83}$$

如果采用线性修正，取

$$\Omega_{x_1}=-K_1\lambda_0\lambda_1,\quad \Omega_{y_1}=-K_2\lambda_0\lambda_2,\quad \Omega_{z_1}=0 \tag{3.84}$$

则(3.83)式变为

$$-\dot{W}=K_1\lambda_0^2\lambda_1^2+K_2\lambda_0^2\lambda_2^2 \tag{3.85}$$

除$\lambda_1=\lambda_2=0$外，$\dot{W}$总是负的。故$\dot{W}$是负定的。即对于λ_1、λ_2而言是稳定的，由于没有涉及到λ_3，需要研究当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，是否含有在给定的修正规律下满足方程(3.77)的整轨线。

设方程(3.79)中$\Omega_{x_1}=\Omega_{y_1}=\Omega_{z_1}=0$，则

$$\lambda_0=0,\ \lambda_3=0,\ \dot{\lambda}_1=\lambda_2\omega_0,\ \dot{\lambda}_2=-\lambda_1\omega_0$$

显然，对于$\lambda_1=\lambda_2=0$来说，轨线$\lambda_0(t)=\lambda_{00}$，$\lambda_3(t)=\lambda_{30}$满足方程。存在整轨线，就是说，根据$\Omega_{x_1}$，$\Omega_{y_1}$两信号修正的情况下，不能满足渐近稳定的条件。因此，利用这两个信号进行定位是不可能的。

(2) 根据Ω_{x_1}，Ω_{z_1}两信号进行修正，即取$K_1>0$，$K_2=0$，$K_3>0$.

仍用线性修正，取

$$\Omega_{x_1}=-K_1\lambda_0\lambda_1;\ \ \Omega_{y_1}=0;\ \ \Omega_{z_1}=-K_3\lambda_0\lambda_3 \tag{3.86}$$

则
$$-\dot{W}=K_1\lambda_0^2\lambda_1^2+K_3\lambda_0^2\lambda_3^2 \tag{3.87}$$

除$\lambda_1=\lambda_3=0$外，$\dot{W}$总是负的，故$\dot{W}$是负定的。对于λ_1、λ_3而言是稳定的。由于没有涉及到λ_2，需要研究当$\lambda_1=\lambda_3=0$时，是否含有在给定的修正规律下满足方程(3.77)的整轨线。

设方程(3.77)中$\Omega_{x_1}=\Omega_{y_1}=\Omega_{z_1}=0$，则

$$\lambda_0=0,\ \lambda_3=0,\ \dot{\lambda}_1=\lambda_2\omega_0,\ \dot{\lambda}_2=-\lambda_1\omega_0$$

因已知$\lambda_1=0$，故λ_2必为零。故除平衡位置$\lambda_i=0$ $(i=1,2,3)$外，无其他整轨线满足方程(3.77)，故此种情况定位是可能的。

同理，利用Ω_{y_1}，Ω_{z_1}两信号进行修正也是可能的。

(3) 只采用一个修正信号

当根据Ω_{x_1}修正时，即$K_1>0$，$K_2=K_3=0$. 对于集合$\lambda_1=0$来说（即使Ω_{x_1}变为零的集合），有解

$$\lambda_0(t)=\lambda_{00};\ \ \lambda_3(t)=\lambda_{30}$$

故定位是不可能的。

当根据Ω_{y_1}修正时($K_1=0$，$K_2>0$, $K_3=0$)与上面相同。

当根据Ω_{z_1}修正时($K_1=K_2=0$，$K_3>0$)，对于集合$\lambda_3=$

、0有解

$$\begin{cases}\lambda_1(t)=\lambda_{10}\cos\omega_0 t+\lambda_{20}\sin\omega_0 t\\ \lambda_2(t)=\lambda_{20}\cos\omega_0 t+\lambda_{10}\sin\omega_0 t\end{cases}$$

定位也是不可能的，故只利用一个修正信号进行定位是不可能的。

为什么在对等速旋转坐标系定位时，可以只采用两个修正信号（Ω_{x_1}，Ω_{y_1}修正除外）呢？下面近似地分析一下修正过程。为了简化，假定$K_i=K$。

设 $\Omega_{x_1}=-K\lambda_0\lambda_1$，$\Omega_{y_1}=0$，$\Omega_{z_1}=-K\lambda_0\lambda_3$

$$(3.88)$$

则(3.77)式变为

$$\begin{cases}2\dot{\lambda}_0=K\lambda_0(\lambda_1^2+\lambda_3^2)=K\lambda_0(1-\lambda_0^2-\lambda_2^2)\\ 2\dot{\lambda}_3=-K\lambda_0(\lambda_0\lambda_3-\lambda_1\lambda_2)\\ 2\dot{\lambda}_1=-K\lambda_0(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)+2\omega_0\lambda_2\\ 2\dot{\lambda}_2=-2\omega_0\lambda_1\end{cases}\tag{3.89}$$

此方程描述在所选的两个修正信号下，将$ox_1y_1z_1$变为$ox^*y^*z^*$的转换过程。为了能看清整个修正过程，根据λ_i变化范围分三个阶段来叙述。

（1）设初始偏差和修正系数K满足

$$\Omega_{x_1}\gg\omega_0，\Omega_{z_1}\gg\omega_0 \qquad （即K\gg\omega_0）\tag{3.90}$$

λ_1和λ_3是微量不满足以上假设的情况，将在后面讨论。此时(3.89)式可近似写成

$$\begin{cases}2\dot{\lambda}_0=K\lambda_0(1-\lambda_0^2-\lambda_2^2)\\ 2\dot{\lambda}_3=-K\lambda_0(\lambda_0\lambda_3-\lambda_1\lambda_2)\\ 2\dot{\lambda}_1=-K\lambda_0(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)\\ 2\dot{\lambda}_2=0\end{cases}\tag{3.91}$$

由第四式

$$\lambda_2(t)=\lambda_{20}$$

代入第一式

$$2\dot{\lambda}_0 = K\lambda_0(1-\lambda_{20}^2-\lambda_0^2)$$

$$(\lambda_0^2)' = K\lambda_0^2[(1-\lambda_{20}^0)-\lambda_0^2]$$

故 $\lambda_0^2(+)$

$$=\frac{\lambda_{00}^2(1-\lambda_{20}^2)}{\lambda_{00}^2[1-e^{-K(1-\lambda_{20}^2)t}]+(1-\lambda_{20}^2)e^{-K(1-\lambda_{20}^2)t}} \tag{3.92}$$

由第二、三式

$$2\lambda_3\dot{\lambda}_3 = -K\lambda_0^2\lambda_3^2 + K\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$2\lambda_1\dot{\lambda}_1 = -K\lambda_0^2\lambda_1^2 - K\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

故 $(\lambda_1^2+\lambda_3^2)' = -K\lambda_0^2(\lambda_1^2+\lambda_3^2)$

$$= -K[(1-\lambda_{20}^2)-(\lambda_1^2+\lambda_3^2)](\lambda_1^2+\lambda_3^2)$$

$$\frac{\lambda_1^2(t)+\lambda_3^2(t)}{\lambda_{10}^2+\lambda_{30}^2}$$

$$=\frac{1-\lambda_{20}^2}{(\lambda_{10}^2+\lambda_{30}^2)[1-e^{K(1-\lambda_{20}^2)t}]+(1-\lambda_{20}^2)e^{K(1-\lambda_{20}^2)t}} \tag{3.93}$$

可以看出，过程收敛的快慢和初始条件$\lambda_{20}^2<1$及K有关。当t值足够大时

$$\lambda_0^2(t) \approx 1-\lambda_{20}^2$$

$$\lambda_1^2(t)+\lambda_3^2(t) \to 0$$

它描述e_2向轴i_2的转换过程。如图3.9所示。

由于 $\lambda_2(t)=\lambda_{20}$

当$\lambda_1^2(t)+\lambda_3^2(t)\to 0$时，$\lambda_0^2(t)+\lambda_{20}^2\to 1$. 在过程中$\lambda_0$递增，因为

$$\lambda_0 = \cos\frac{\alpha}{2}$$

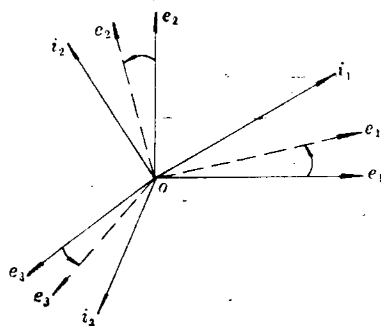


图 3.9　第一阶段修正过程示意图

α 为绕欧拉轴的转角，故转角 $\alpha(t)$ 从初值 α_0 开始减小。这表示坐标系 $ox_1y_1z_1$ 已从开始定向的位置绕 e_2 轴转了一个 $\Delta\alpha$ 角。至此，第一个快速阶段结束。

(2) 当继续修正运动时，轴 e_2 和 i_2 变得很靠近（如图3.9），运动将是坐标系 $ox_1y_1z_1$ 绕轴 i_2 的旋转，$\alpha(t)$ 应减小至零，使坐标系 $ox_1y_1z_1$ 与 $ox^*y^*z^*$ 重合。绕轴 $i_2(e_2)$ 的旋转是第二阶段的运动。为了近似研究这一阶段的运动，设方程(3.89)中 $\lambda_1\approx0$，$\lambda_3\approx0$，这是因为 $\lambda_1(t)$、$\lambda_3(t)$ 由于修正而变成了微量。这个微量值是在第二阶段运动中所要保持的，则由(3.89)式第二式

$$\lambda_3\approx\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_0} \tag{3.94}$$

由第三式

$$\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3\approx\frac{2\omega_0\lambda_2}{K\lambda_0} \tag{3.95}$$

将(3.94)式代入(3.95)式，则

$$\lambda_1=\frac{2\omega_0\lambda_2}{K(\lambda_0^2+\lambda_2^2)}=\frac{2\omega_0}{K}\lambda_2 \tag{3.96}$$

因 λ_2 和 λ_3 是微量，故 $\lambda_0^2+\lambda_2^2=1-\lambda_3^2\approx1$. 将(3.96)式代入

(3.89)第四式，则

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{2\omega_0^2}{K}\lambda_2$$

故 $$\lambda_2(t) = \lambda_{20} e^{-\frac{2\omega_0^2}{K}t} \tag{3.97}$$

式中λ_{20}是运动第二阶段的起始值。此时

$$\lambda_1(t) = \frac{2\omega_0}{K}\lambda_{20} e^{-\frac{2\omega_0^2}{K}t} \tag{3.98}$$

$$\lambda_3(t) = \frac{2\omega_0 \lambda_{20}^2}{K\lambda_0} e^{-\frac{4\omega_0^2}{K}t} \tag{3.99}$$

此式描述$ox_1y_1z_1$绕轴$e_2(i_2)$向定位位置的转变。当时间增大时，$\lambda_1(t)$、$\lambda_2(t)$、$\lambda_3(t)$均衰减为小量，可以看出修正系数K值对过程的收敛速度起相反作用，随着K值的增大而减慢。为了加速收敛过程，可以引入交叉修正信号

$$\Omega_{y_1} = -h\lambda_0\lambda_1 \tag{3.100}$$

在$\lambda_1 = \lambda_3 = 0$的情况下，$\lambda_1$、$\lambda_3$是一阶微量，则由(3.77)式，可得到类似于(3.96)式的结果，而(3.77)式第三式变为

$$2\dot{\lambda}_2 = -(h\lambda_0^2 + 2\omega_0)\lambda_1 \approx -\frac{2(h\lambda_0^2 + 2\omega_0)\omega_0}{K}\lambda_2 \tag{3.101}$$

因 $$\lambda_0^2 = 1 - \lambda_2^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \approx 1 - \lambda_2^2$$

则 $$\dot{\lambda}_2 = -\frac{[(h + 2\omega_0) - h\lambda_2^2]\omega_0}{K}\lambda_2 \tag{3.102}$$

$$\lambda_2(t) = \frac{\lambda_{20}\exp\left[-\frac{(h+2\omega_0)\omega_0}{K}t\right]}{\sqrt{1 + \frac{h}{h+2\omega_0}\lambda_{20}^2\left\{\exp\left[-\frac{2(h+2\omega_0)\omega_0}{K}t\right] - 1\right\}}} \tag{3.103}$$

可以看出，引入交叉修正，可以大大加速收敛过程。

(3) 在分量$\lambda_2(t)$变成微量后，近似解(3.93)、(3.97)、(3.103)式都失去意义。当λ_2，λ_3两个值很小时，平衡位置近旁的第三阶段运动，由线性化(3.89)式来描述，略去方程中λ_1、λ_2、λ_3($\lambda_0\approx1$)的二阶微量，则

$$2\dot{\lambda}_3=-K\lambda_3,\quad \lambda_3=\lambda_{30}e^{-\frac{K}{2}t} \tag{3.104}$$

$$\begin{cases}2\dot{\lambda}_1=-K\lambda_1+2\omega_0\lambda_2\\ 2\dot{\lambda}_2=-2\omega_0\lambda_1\end{cases} \tag{3.105}$$

可以看出通道λ_3与通道λ_1、λ_2无关，而λ_1、λ_2通过ω_0互相交联。此时

$$\ddot{\lambda}_1+\frac{K}{2}\dot{\lambda}_1+\omega_0^2\lambda_1=0$$

故

$$\begin{cases}\lambda_1(t)=C_{11}e^{-\frac{K}{4}t}e^{\sqrt{\frac{K^2}{16}-\omega_0^2}\,t}+C_{12}e^{-\frac{K}{4}t}e^{-\sqrt{\frac{K^2}{16}-\omega_0^2}\,t}\\ \lambda_2(t)=C_{21}e^{-\frac{K}{4}t}e^{\sqrt{\frac{K^2}{16}-\omega_0^2}\,t}+C_{22}e^{-\frac{K}{4}t}e^{-\sqrt{\frac{K^2}{16}-\omega_0^2}\,t}\end{cases} \tag{3.106}$$

当ω_0与K比较很小时，收敛过程的时间很长。为使收敛过程加快，可引入交叉修正(3.100)式，此时

$$2\dot{\lambda}_2=-h\lambda_1-2\omega_0\lambda_1$$

$$\lambda_2(t)=C_{21}e^{-\frac{K}{4}t}e^{\sqrt{\frac{K^2}{16}-\omega_0\left(\omega_0+\frac{h}{2}\right)}\,t}+C_{22}e^{-\frac{K}{4}t}e^{-\sqrt{\frac{K^2}{16}-\omega_0\left(\omega_0+\frac{h}{2}\right)}\,t} \tag{3.107}$$

可以通过交叉修正系数h的选择来加速收敛过程。

(4) 最后研究在奇点$\lambda_{20}\approx1$的状态。

当$\lambda_{20}=1$时，

$$\lambda_2=\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}$$

如图3.10所示，由方程(3.89)可以看出$\lambda_2=1$，$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_3=0$是方程的特解。在此位置上，修正信号$\Omega_{x1}$、$\Omega_{z1}$变为零，是平衡位置。现在需要证明此位置是不稳定平衡位置。

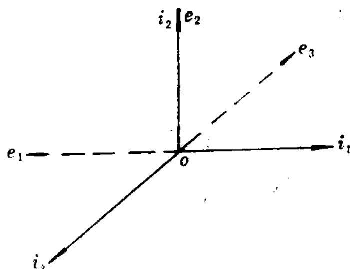


图 3.10　奇点$\lambda_{20}\approx1$时示意图

研究此点近旁的情况。设在方程(3.77)中，$\lambda_2\approx1$，λ_0、λ_1、λ_3均是微量，此时$\Omega_{y1}=0$，方程变为

$$\begin{cases}2\dot{\lambda}_0=-\lambda_1\Omega_{x1}-\lambda_3\Omega_{z1}\\2\dot{\lambda}_1=\lambda_0\Omega_{x1}+\Omega_{z1}+2\omega_0\\2\dot{\lambda}_2=\lambda_3\Omega_{x1}-\lambda_1\Omega_{z1}-2\lambda_1\omega_0\\2\dot{\lambda}_3=\lambda_0\Omega_{z1}-\Omega_{x1}\end{cases}\tag{3.108}$$

因　$\Omega_{x1}=-K\lambda_0\lambda_1$，$\Omega_{z1}=-K\lambda_0\lambda_3$，在$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_3=0$的点上变为零。在其邻域内，略去三阶微量，则

$$\begin{cases}2\dot{\lambda}_0=0\\2\dot{\lambda}_3=K\lambda_0\lambda_1\\2\dot{\lambda}_1=-K\lambda_0\lambda_3+2\omega_0\\2\dot{\lambda}_2=-2\omega_0\lambda_1\end{cases}\tag{3.109}$$

故
$$\lambda_0(t)=\lambda_{00}\tag{3.110}$$

$$\ddot{\lambda}_1+\frac{K^2}{4}\lambda_{00}^2\lambda_1=0$$

$$\lambda_1(t)=C_{11}\cos\frac{K\lambda_{00}}{2}t+C_{12}\sin\frac{K\lambda_{00}}{2}t\tag{3.111}$$

是一保守系统，其频率

$$\gamma^2=\frac{K^2\lambda_{00}^2}{4} \tag{3.112}$$

$$\begin{cases}C_{11}=\lambda_{10}\\ C_{12}=-\dfrac{K\lambda_{00}}{2\nu}\lambda_{30}+\dfrac{\omega_0}{\gamma}\lambda_{20}\end{cases} \tag{3.113}$$

代入(3.109)式第四式，积分之

$$\lambda_2(t)=\lambda_{20}-\omega_0\left[\frac{C_{11}}{\gamma}\sin\gamma t-\frac{C_{12}}{\gamma}\cos\gamma t\right]\Bigg|_0^t$$

$$=\lambda_{20}-\frac{\omega_0}{\gamma}\lambda_{10}\sin\gamma t+\left(\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\lambda_{20}-\frac{K\lambda_{00}}{2\gamma^2}\omega_0\lambda_{30}\right)\cdot(\cos\gamma t-1)$$

$$=\lambda_{20}\frac{(\gamma^2-\omega_0^2+\omega_0^2\cos\gamma t)}{\gamma^2}+\lambda_{30}\frac{\omega_0K\lambda_{00}}{2\gamma^2}(1-\cos\gamma t)-\lambda_{10}\frac{\omega_0}{\gamma}\sin\gamma t \tag{3.114}$$

此解表明，只有在

$$\gamma^2=\frac{K^2\lambda_{00}^2}{4}\gg\omega_0^2$$

时，$\lambda_2(t)$才会接近于1．即使在小放大系数的情况下，只要有旋转角速度ω_0存在，就会使系统较快地偏离这一点。

二、按方向余弦函数的形式进行控制的情况

研究三通道修正的情况，与(3.54)和(3.55)式相似，根据e，I两坐标系之间的方向余弦进行控制。

引入辽普诺夫函数

$$W=\alpha(1-\lambda_0^2)+\beta\lambda_3^2+\gamma\lambda_2^2+\delta\lambda_1^2 \tag{3.115}$$

则 $-\dot{W}=-2\alpha\lambda_0\dot{\lambda}_0+2\beta\lambda_3\dot{\lambda}_3+2\gamma\lambda_2\dot{\lambda}_2+2\delta\lambda_1\dot{\lambda}_1$

由(3.77)式，且采用线性修正(3.54)式，则得：

$$
\begin{aligned}
-\quad =&[K_1(\alpha+\delta)\lambda_0^2\lambda_1^2+K_1(\beta-\gamma)\lambda_2^2\lambda_3^2\\
&+K_1(\gamma-\alpha-\beta-\delta)\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3]\\
&+[K_2(\alpha+\gamma)\lambda_0^2\lambda_2^2+K_2(\beta-\delta)\lambda_1^2\lambda_3^2\\
&+K_2(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3]\\
&+[K_3(\alpha+\beta)\lambda_0^2\lambda_3^2\pm K_3(\delta-\gamma)\lambda_1^2\lambda_2^2\\
&\pm K_3(\delta-\gamma+\alpha+\beta)\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3]\\
&-2\omega_0(\delta-\gamma)\lambda_1\lambda_2 \qquad (3.116)
\end{aligned}
$$

式中“+”号对应于Ω_{z1}采用(3.54)式，“-”号对应于Ω_{z1}采用(3.55)式。

设选择$\delta=\gamma$，则

$$
\begin{aligned}
-\dot{W}=&[K_1(\alpha+\delta)\lambda_0^2\lambda_1^2+K_1(\beta-\gamma)\lambda_2^2\lambda_3^2+a\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3]\\
&+[K_2(\alpha+\gamma)\lambda_0^2\lambda_2^2+K_2(\beta-\delta)\lambda_1^2\lambda_3^2\\
&+b\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3]+K_3(\alpha+\beta)\lambda_0^2\lambda_3^2 \qquad (3.117)
\end{aligned}
$$

式中 $$a+b=(K_2-K_1\pm K_3)(\alpha+\beta)=d \qquad (3.118)$$

为了使$\dot{W}$是负定的，必须满足

$$K_i>0\quad(i=1,2,3),\ \beta\geqslant\gamma\ (或\beta\geqslant\delta) \qquad (3.119)$$

由(3.118)式，为了使二次型是正定的，必须

$$4K_1^2(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)\geqslant a^2;\ 4K_2^2(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)\geqslant b^2 \qquad (3.120)$$

即
$$
\begin{cases}
-2K_1\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}\leqslant a\leqslant 2K_1\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}\\
-2K_2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}\leqslant b\leqslant 2K_2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}
\end{cases} \qquad (3.121)
$$

即
$$
\begin{aligned}
&-2(K_1+K_2)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}\\
&\leqslant d\leqslant 2(K_1+K_2)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)} \qquad (3.122)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
K_2(\sqrt{\alpha+\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma})^2-K_1(\sqrt{\alpha+\gamma}-\sqrt{\beta-\gamma})^2\\
\pm K_3(\alpha+\beta)\geqslant 0\\
K_1(\sqrt{\alpha+\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma})^2-K_2(\sqrt{\alpha+\gamma}-\sqrt{\beta-\gamma})^2\\
\mp K_3(\alpha+\beta)\geqslant 0
\end{cases} \qquad (3.123)
$$

为了满足(3.123)式，设

$$\alpha+\gamma=\beta-\gamma \tag{3.124}$$

则由(3.123)式第一式

$$K_1\geqslant K_3\frac{\alpha+\beta}{4(\alpha+\gamma)}=\frac{K_3}{2} \tag{3.125}$$

由(3.123)式第二式

$$K_2\geqslant K_3\frac{\alpha+\beta}{4(\alpha+\gamma)}=\frac{K_3}{2} \tag{3.126}$$

以上不等式，可以通过选择修正系数来满足，故辽普诺夫函数的导数是负定的，而修正过程是渐近稳定的。

与(3.125)式相对应的是，控制中使用i_2的两个方向余弦进行修正，这一情况决定轴e_2同轴i_2的重合过程，而(3.126)式则对应于用i_1的两个方向余弦进行修正，决定e_1和i_1的重合过程。

与惯性空间定位相比，可以看出，由于坐标系$ox^*y^*z^*$以常值$\omega_0 i_3$旋转，多了参数α、β、γ和δ的补充条件，$\delta=\gamma$，$\alpha+\gamma=\beta-\gamma$，由此导出不等式(3.125)和(3.126)。

由以上叙述可以看出，当控制中只使用轴i_2的两个方向余弦时，可设$K_2=0$. 此时，除轴e_2和i_2重合所对应的位置外，辽普诺夫函数及其导数为定号的全部条件都保持不变。而重合所对应的位置如前所述，它不是运动方程(3.77)的整轨线。故知，根据一个轴i_2（i_1有相同结果）的两个方向余弦修正时，在旋转坐标系中，三轴定位是可能的。

§5 定位的动力学问题

我们把误差信号直接与角速发生联系的控制运动稳定性问题，称之为运动学稳定性。实际误差信号是加在刚体的外力矩

上，通过力矩作用改变刚体旋转角速度来实现控制的。因此，与刚体动力学联系起来，我们要研究动力学的稳定问题。前两节所研究的运动学稳定条件，对于动力学稳定来说，也是稳定的必要条件。其附加的条件是需要考虑阻尼力矩的影响。

以线性修正规律作为控制函数的动力学控制为例，刚体欧拉方程为

$$\begin{cases} I_{x_1}\dot{\omega}_{x_1}+(I_{z_1}-I_{y_1})\omega_{y_1}\omega_{z_1}=M_{x_1} \\ I_{y_1}\dot{\omega}_{y_1}+(I_{x_1}-I_{z_1})\omega_{x_1}\omega_{z_1}=M_{y_1} \\ I_{z_1}\dot{\omega}_{z_1}+(I_{y_1}-I_{x_1})\omega_{x_1}\omega_{y_1}=M_{z_1} \end{cases} \tag{3.127}$$

式中M_{x_1}、M_{y_1}、M_{z_1}为控制力矩。如果采用线性修正规律，设

$$\begin{cases} M_{x_1}=-h_1\omega_{x_1}-K_1\lambda_0\lambda_1 \\ M_{y_1}=-h_2\omega_{y_1}-K_2\lambda_0\lambda_2 \\ M_{z_1}=-h_3\omega_{z_1}-K_3\lambda_0\lambda_3 \end{cases} \tag{3.128}$$

作辽普诺夫函数

$$T=V+W \tag{3.129}$$

这里 $$W=1-\lambda_0^2=\frac{1}{2}[(1-\lambda_0^2)+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2] \tag{3.130}$$

$$V=\frac{1}{2}(I_{x_1}^2\omega_{x_1}^2+I_{y_1}^2\omega_{y_1}^2+I_{z_1}^2\omega_{z_1}^2) \tag{3.131}$$

是刚体的动能。

显然，函数T是正定的。而且在相对于惯性空间定位的位置上为零。即

$$\omega_{x_1}=\omega_{y_1}=\omega_{z_1}=0,\ \lambda_0=1,\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

辽普诺夫函数的导数

$$\begin{aligned} \dot{T}=&I_{x_1}\omega_{x_1}M_{x_1}+I_{y_1}\omega_{y_1}M_{y_1}+I_{z_1}\omega_{z_1}M_{z_1} \\ &+\lambda_0\lambda_1\omega_{x_1}+\lambda_0\lambda_2\omega_{y_1}+\lambda_0\lambda_3\omega_{z_1} \end{aligned} \tag{3.132}$$

将(3.128)式代入上式，则

$$\dot{T}=-h_1I_{x_1}\omega_{x_1}^2-h_2I_{y_1}\omega_{y_1}^2-h_3I_{z_1}\omega_{z_1}^2$$
$$-\lambda_0\lambda_1\omega_{x_1}(K_1I_{x_1}-1)$$
$$-\lambda_0\lambda_2\omega_{y_1}(K_2I_{y_1}-1)$$
$$-\lambda_0\lambda_3\omega_{z_1}(K_3I_{z_1}-1) \tag{3.133}$$

如果选择

$$\begin{cases} h_i>0 \qquad i=1,2,3 \\ K_1=\dfrac{1}{I_{x_1}};\ \ K_2=\dfrac{1}{I_{y_1}};\ \ K_3=\dfrac{1}{I_{z_1}} \end{cases}$$

则$\dot{T}$是负定的，按(3.128)式控制是稳定的，当然(3.135)式是一种特殊情况，实际上，只要能保证

$$-\lambda_0\lambda_1\omega_{x_1}(K_1I_{x_1}-1)-\lambda_0\lambda_2\omega_{y_1}(K_2I_{y_1}-1)$$
$$-\lambda_0\lambda_3\omega_{z_1}(K_3I_{z_1}-1)$$

是负定的，则$\dot{T}$即是负定的。

如果将(3.128)式写成

$$\begin{cases} M_{x_1}=-h_1\left(\omega_{x_1}-\dfrac{K_1}{h_1}\lambda_0\lambda_1\right)=-h_1(\omega_{x_1}-K_1^*\lambda_0\lambda_1) \\ \quad=-h_1(\omega_{x_1}-\Omega_{x_1}) \\ M_{y_1}=-h_2\left(\omega_{y_1}-\dfrac{K_2}{h_2}\lambda_0\lambda_2\right)=-h_2(\omega_{y_1}-K_2^*\lambda_0\lambda_2) \\ \quad=-h_2(\omega_{y_1}-\Omega_{y_1}) \\ M_{z_1}=-h_3\left(\omega_{z_1}-\dfrac{K_3}{h_3}\lambda_0\lambda_3\right)=-h_3(\omega_{z_1}-K_3^*\lambda_0\lambda_3) \\ \quad=-h_3(\omega_{z_1}-\Omega_{z_1}) \end{cases} \tag{3.134}$$

式中Ω_{x_1}、Ω_{y_1}、Ω_{z_1}为运动学修正角速度。如果通过K_i^*的选择，已经保证了$\dot{W}$是负定的，则只需保证

$$\dot{V}=-I_x\omega_{x_1}h_1(\omega_{x_1}-\Omega_{x_1})-I_{y_1}\omega_{y_1}h_2(\omega_{y_1}-\Omega_{y_1})$$
$$-I_{z_1}\omega_{z_1}h_3(\omega_{z_1}-\Omega_{z_1}) \tag{3.135}$$

是负定的，辽普诺夫函数$\dot{T}$即是负定的。

(3.135)式在$|\omega_{x_1}|>|\Omega_{x_1}|$，$|\omega_{y_1}|>|\Omega_{y_1}|$，$|\omega_{z_1}|>|\Omega_{z_1}|$时，总是负的。反之，则是正的。由此可见，利用(3.134)式进行控制，当角速度较大时，将刚体动能减小到与$\omega_{x_1}=\Omega_{x_1}$、$\omega_{y_1}=\Omega_{y_1}$、$\omega_{z_1}=\Omega_{z_1}$相对应的数值；而当角速度较小时，则增大动能。所以，控制(3.134)式力求将运动变成角速度为Ω的旋转。

考虑到§3的条件(3.53)式，可以将控制函数写成更一般的形式，即

$$\begin{cases} M_{x_1}=-F_1(\omega_{x_1}-\Omega_{x_1}) \\ M_{y_1}=-F_2(\omega_{y_1}-\Omega_{y_1}) \\ M_{z_1}=-F_3(\omega_{z_1}-\Omega_{z_1}) \end{cases}$$

式中F_i属于(3.53)式所给定的函数类。

§6 刚体姿态运动学的最优控制

以上几节研究了姿态控制的稳定性问题。可以看出，无论是利用四元数分量作为控制信号，还是利用四元数分量所表示的方向余弦作为控制信号，通过参数选择，都可以保证控制的稳定性。现来研究在保证稳定性条件下，如何实现最优控制。

首先研究运动学的最优控制。所谓运动学的最优控制是指用角速度作为控制函数，将刚体从一种姿态转变到另一种姿态时，能满足某些最优性能指标。本节研究最速转动问题。此时最优性能指标是使

$$J=\int_{t_0}^{T}dt=T-t_0 \tag{3.136}$$

最小。

设体坐标系$ox_1y_1z_1$相对于需要坐标系$ox^*y^*z^*$的相对转动角速度为Ω，其在体坐标系各轴上的分量为Ω_1、Ω_2、Ω_3，且$\Omega_i(i=1,2,3)$属于有界闭集D．其转换四元数为λ．则

$$\lambda = \frac{1}{2}\Omega_1 * \lambda \tag{3.137}$$

其标量形式的方程为

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda}_0 = -\lambda_1\Omega_1 - \lambda_2\Omega_2 - \lambda_3\Omega_3 \\ 2\dot{\lambda}_1 = \lambda_0\Omega_1 - \lambda_2\Omega_3 + \lambda_3\Omega_2 \\ 2\dot{\lambda}_2 = \lambda_0\Omega_2 + \lambda_1\Omega_3 - \lambda_3\Omega_1 \\ 2\dot{\lambda}_3 = \lambda_0\Omega_3 - \lambda_1\Omega_2 + \lambda_2\Omega_1 \end{cases} \tag{3.138}$$

当　$t=t_0$时　$\lambda(t_0)=\lambda_{t_0}$

　　$t=T$时　$\lambda(T)=\lambda_T$

设共轭变量为 ψ，由庞特里亚金极大原理，对最速转动，其哈密顿函数为

$$\ae = \Psi_0\lambda_0 + \Psi_1\lambda_1 + \Psi_2\lambda_2 + \Psi_3\lambda_3 \tag{3.139}$$

共轭变量$\Psi_i(i=0,1,2,3)$，满足正则方程

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{\partial \ae}{\partial \lambda_i} \tag{3.140}$$

其标量方程为

$$\begin{cases} 2\dot{\Psi}_0 = -\Psi_1\Omega_1 - \Psi_2\Omega_2 - \Psi_3\Omega_3 \\ 2\dot{\Psi}_1 = \Psi_0\Omega_1 - \Psi_2\Omega_3 + \Psi_3\Omega_2 \\ 2\dot{\Psi}_2 = \Psi_0\Omega_2 + \Psi_1\Omega_3 - \Psi_3\Omega_1 \\ 2\dot{\Psi}_3 = \Psi_0\Omega_3 - \Psi_1\Omega_2 + \Psi_2\Omega_1 \end{cases} \tag{3.141}$$

由极大原理，当最优控制时，函数æ在D上达极大值。

$$\max_{\Omega\in D} \ae[\lambda^*(t), \Psi^*(t), \Omega_i(t)] = \ae^*[\lambda^*(t), \Psi^*(t), \Omega_i^*(t)] \tag{3.142}$$

式中$\Omega_i^*(t)$是最优控制，$\lambda^*(t)$为由$\Omega_i^*(t)$所确定的最优轨线。

联立(3.138)、(3.141)和(3.142)式，共8个微分方程和三个极值条件，利用8个边界条件解之，即可确定最优控制$\Omega_i^*(t)$. 这是典型的两点边值问题。由于是变系数微分方程，

解起来非常复杂，只能用数值积分法。

但比较(3.138)和(3.141)式，可以看出，两方程组是完全相同的，故方程组是自共轭的。此两方程组的解只相差一常值四元数，如果令

$$\Psi=\lambda*C_E$$

则
$$C_E=\lambda^**\Psi \tag{3.143}$$

因
$$2\dot{C}_E=2\dot{\lambda}^**\Psi+2\lambda^**\dot{\Psi}$$
$$=-\lambda^**\Omega_1*\lambda*C_E+\lambda^**\Omega_1*\lambda*C_E=0$$

故 C_E为常值四元数。

将(3.138)式代入(3.139)式，则

$$\begin{aligned}æ=&\frac{1}{2}\Omega_1(\Psi_1\lambda_0-\Psi_0\lambda_1+\Psi_3\lambda_2-\Psi_2\lambda_3)\\&+\frac{1}{2}\Omega_2(\Psi_2\lambda_0-\Psi_3\lambda_1-\Psi_0\lambda_2+\Psi_1\lambda_3)\\&+\frac{1}{2}\Omega_3(\Psi_3\lambda_0+\Psi_2\lambda_1-\Psi_1\lambda_2-\Psi_0\lambda_3)\end{aligned} \tag{3.144}$$

引入矢量函数$P_E(t)$，称之为共轭矢量，其分量为

$$\begin{cases}P_{1E}=\Psi_1\lambda_0-\Psi_0\lambda_1+\Psi_3\lambda_2-\Psi_2\lambda_3\\P_{2E}=\Psi_2\lambda_0-\Psi_3\lambda_1-\Psi_0\lambda_2+\Psi_1\lambda_3\\P_{3E}=\Psi_3\lambda_0+\Psi_2\lambda_1-\Psi_1\lambda_2-\Psi_0\lambda_3\end{cases} \tag{3.145}$$

则
$$æ=\frac{1}{2}(\Omega_1P_{1E}+\Omega_2P_{2E}+\Omega_3P_{3E})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_1\cdot\boldsymbol{P}_E \tag{3.146}$$

由极大原理，最优控制的必要条件是哈密顿函数最大，故控制矢量$\boldsymbol{\Omega}_1$必与共轭矢量P_E共线。即应满足

$$\boldsymbol{\Omega}_1=h\boldsymbol{P}_E \tag{3.147}$$

式中 h 为比例系数。在有界闭集D上

$$|\Omega|^2=\Omega_1^2+\Omega_2^2+\Omega_3^2\leqslant\Omega_0^2$$

故
$$\Omega_1=\Omega_0 P_E \tag{3.148}$$

研究共轭矢量$P_E(t)$。由(3.145)式可以看出$P_E(t)$由Ψ_i和λ_i来确定，而$\Psi_i(t)$可以用$\lambda_i(t)$来表示。故$P_E(t)$可以表示为$\lambda_i(t)$的函数。由(3.145)式

$$P_E=\mathrm{Vect}(\Psi*\lambda^*) \tag{3.149}$$

而
$$\Psi*\lambda^*=\lambda*C_E*\lambda^*$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Scal}(\Psi*\lambda^*)&=\mathrm{Scal}(\lambda*C_E*\lambda^*)=\mathrm{Scal}(\lambda^**\lambda*C_E)\\&=\mathrm{Scal}C_E\end{aligned} \tag{3.150}$$

由于共轭方程组的齐次性，可选择Ψ的范数为 1，则

$$\|\Psi*\lambda^*\|=\|\lambda*C_E*\lambda^*\|=\|C_E\|=\|\Psi\|\|\lambda^*\|=1$$

故C_E的范数也等于 1. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(\Psi*\lambda^*)&=\Psi*\lambda^*-\mathrm{Scal}(\Psi*\lambda^*)\\&=\lambda*C_E*\lambda^*-\mathrm{Scal}C_E\\&=\lambda*(C_E-\mathrm{Scal}C_E)*\lambda^*=\lambda*C_E*\lambda^*\end{aligned} \tag{3.151}$$

故得决定共轭矢量的基本关系式

$$P_E=\lambda*C_E*\lambda^* \tag{3.152}$$

代入(3.148)式，则得最优控制

$$\Omega_1=\Omega_0\lambda*C_E*\lambda^* \tag{3.153}$$

还必须指出的是：四元数λ是刚体位置的双函数（即λ和$-\lambda$恒等于一个位置），由(3.141)式，四元数Ψ也可以是双值的。故知P_E和C_E一样，也应该是双值的。就是说，同时满足最优问题的两个值C_E和$-C_E$可能存在。由(3.153)式Ω_1的不同符号，也即是不同的旋转方向对应于C_E的两种符号。这两个解都满足最优条件，并分别给出角度为$\Omega_0(T-t_0)=\alpha$或$\Omega_0(T-t_0)=2\pi-\alpha$的转动。两个解中只有一个满足最速转动条件($\alpha=\pi$除外)。据此，对于最速转动来说，应满足下列条件

$$\Omega_0(T-t_0)\leqslant\pi \tag{3.154}$$

进一步简化(3.153)式。因此时

$$2\dot{\lambda}=\boldsymbol{\Omega}_1*\lambda=\Omega_0\lambda*\boldsymbol{C}_E*\lambda^**\lambda=\Omega_0\lambda*\boldsymbol{C}_E \tag{3.155}$$

因为$\Omega_0\boldsymbol{C}_E$是常值矢量，则

$$\lambda(t)=\lambda_{t_0}*\exp\left(\frac{1}{2}\Omega_0\boldsymbol{C}_Et\right) \tag{3.156}$$

当$t=T$时，$\lambda(T)=\lambda_T$

$$\lambda_T=\lambda_{t_0}*\exp\left(\frac{1}{2}\Omega_0\boldsymbol{C}_ET\right) \tag{3.157}$$

故

$$\exp\left(\frac{1}{2}\Omega_0\boldsymbol{C}_ET\right)=\lambda^*_{t_0}*\lambda_T \tag{3.158}$$

因$\boldsymbol{C}_E$是单位矢量，故

$$\lambda^*_{t_0}*\lambda_T=\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0T\right)+\boldsymbol{C}_E\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0T\right) \tag{3.159}$$

故

$$\boldsymbol{C}_E=\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0T\right)}\left[\lambda^*_{t_0}*\lambda_T-\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0T\right)\right] \tag{3.160}$$

代入(3.156)式，得最优轨线。

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=\lambda_{t_0}*\left[\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0t\right)+\frac{\lambda^*_{t_0}*\lambda_T-\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0T\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0T\right)}\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0t\right)\right]\\&=\lambda_{t_0}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0t\right)-\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0T\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0T\right)}\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0t\right)\right]\\&\quad+\lambda_T\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0T\right)}\end{aligned} \tag{3.161}$$

此时最优控制函数

$$\boldsymbol{\Omega}_1(t)=\frac{\Omega_0}{\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0 T\right)}\left[\lambda*\lambda_{t_0}^**\lambda_T*\lambda^*-\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0 T\right)\right] \tag{3.162}$$

因

$$\begin{aligned}\lambda*\lambda_{t_0}^**\lambda_T*\lambda^*=&\left[\lambda_{t_0}*\exp\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t\right)\right]\\&*\lambda_{t_0}*\left[\lambda_{t_0}*\exp\left(\frac{1}{2}\Omega_0 T\right)\right]\\&*\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\Omega_0 t\right)*\lambda_{t_0}^*\right]=\lambda_T*\lambda_{t_0}^*\end{aligned} \tag{3.163}$$

故最后得最优控制表达式

$$\boldsymbol{\Omega}_1(t)=\frac{\Omega_0}{\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0 T\right)}\left[\lambda_T*\lambda_{t_0}^*-\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0 T\right)\right] \tag{3.164}$$

因此，以最大可能的常值角速度(3.164)式进行平面转动是最速转动。而由(3.161)式确定的$\lambda(t)$是最优轨线。

由(3.164)式可以看出，当T确定后，$\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0 T\right)$为常数，则最优控制$\boldsymbol{\Omega}_1(t)$只取决于起始瞬间和终端时间的四元数。如图3.11，λ_{t_0}表示将基准I变为E_0的变换四元数。λ_T表示将基准I变为E_T的变换四元数。而将E_0变换为E_T的误差四元数为λ，则

$$\lambda*\lambda_{t_0}=\lambda_T$$

故

$$\lambda=\lambda_T*\lambda_{t_0}^* \tag{3.165}$$

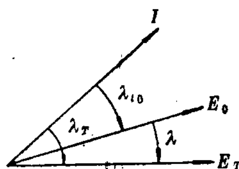


图 3.11 基准I和E_0, E_T关系示意图

故利用

$$\Omega_i = \Omega_0 \frac{\lambda_i}{\sqrt{1-\lambda_0^2}} \text{Sign}\,\lambda_0 \quad (i=1,2,3) \qquad (3.166)$$

来作为角速度修正信号是最佳控制。利用(3.49)式进行控制近似于最优控制。

§7 刚体姿态动力学的最优控制

运动学的最优控制是使修正角速度直接与误差信号发生联系。前言已经说过，实际上误差信号是加在刚体的外力矩上，通过力矩作用改变刚体旋转角速度来实现控制的。因此，在研究刚体姿态动力学的最优控制时，首先要引入刚体的力矩方程

$$\begin{cases} I_{x_1}\dot{\omega}_{x_1} + (I_{z_1} - I_{y_1})\omega_{y_1}\omega_{z_1} = M_{x_1} \\ I_{y_1}\dot{\omega}_{y_1} + (I_{x_1} - I_{z_1})\omega_{x_1}\omega_{z_1} = M_{y_1} \\ I_{z_1}\dot{\omega}_{z_1} + (I_{y_1} - I_{x_1})\omega_{x_1}\omega_{y_1} = M_{z_1} \end{cases} \qquad (3.167)$$

式中力矩$M\{M_{x_1},\ M_{y_1},\ M_{z_1}\}$是有界的。属于某一闭域$M$.

设将体坐标系$ox_1y_1z_1$转换成需要坐标系$ox^*y^*z^*$的变换四元数为λ. 如果设$ox^*y^*z^*$为惯性坐标系，则

$$2\dot{\lambda} = \boldsymbol{\omega}_1 * \lambda \qquad (3.168)$$

起始条件：$t=t_0$时　$\lambda(t_0)=\lambda_{t_0}$，$\boldsymbol{\omega}_1(t_0)=\boldsymbol{\omega}_0$

终端条件：$t=T$时　$\lambda(T)=\lambda_T$，$\boldsymbol{\omega}(T)=\boldsymbol{\omega}_T=0$

方程(3.167)和(3.168)为状态方程，包含ω_{x_1}，ω_{y_1}，ω_{z_1}，λ_0，λ_1，λ_2，λ_3等七个状态变量，其中M_{x_1}、M_{y_1}、M_{z_1}为控制变量，由最优控制条件来确定。研究两种最优性能指标。

(1) 最速转动，即要求转动时间T最小，其性能指标为

$$J = \int_{t_0}^{T} dt = T - t_0 \quad \text{最小} \qquad (3.169)$$

设对应于角速度ω_{x_1}、ω_{y_1}、ω_{z_1}的共轭变量为φ_x、φ_y、φ_z；

对应于λ_0、λ_1、λ_2、λ_3的共轭变量为Ψ_0、Ψ_1、Ψ_2、Ψ_3，则哈密顿函数

$$
\begin{aligned}
æ &= \langle \varphi, \dot{\omega} \rangle + \langle \Psi, \lambda \rangle = æ_d + æ_k \\
&= \varphi_x \left(\frac{M_{x_1}}{I_{x_1}} - \frac{I_{z_1} - I_{y_1}}{I_{x_1}} \omega_{y_1} \omega_{z_1} \right) \\
&\quad + \varphi_y \left(\frac{M_{y_1}}{I_{y_1}} - \frac{I_{x_1} - I_{z_1}}{I_{y_1}} \omega_{x_1} \omega_{z_1} \right) \\
&\quad + \varphi_z \left(\frac{M_{z_1}}{I_{z_1}} - \frac{I_{y_1} - I_{x_1}}{I_{z_1}} \omega_{x_1} \omega_{y_1} \right) + æ_k
\end{aligned}
\tag{3.170}
$$

式中 $æ_d$为哈密顿函数动力学部分，$æ_K$ 为哈密顿函数运动学部分。

$$
\begin{aligned}
æ_K &= \frac{1}{2} \omega_{x_1} (\Psi_1 \lambda_0 - \Psi_0 \lambda_1 + \Psi_3 \lambda_2 - \Psi_2 \lambda_3) \\
&\quad + \frac{1}{2} \omega_{y_1} (\Psi_2 \lambda_0 - \Psi_3 \lambda_1 - \Psi_0 \lambda_2 + \Psi_1 \lambda_3) \\
&\quad + \frac{1}{2} \omega_{z_1} (\Psi_3 \lambda_0 + \Psi_2 \lambda_1 - \Psi_1 \lambda_2 - \Psi_0 \lambda_3) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\omega_{x_1} P_{1E} + \omega_{y_1} P_{2E} + \omega_{z_1} P_{3E})
\end{aligned}
\tag{3.171}
$$

由正则方程知

$$
\begin{cases}
\varphi_j = -\dfrac{\partial æ_j}{\partial \omega_j} \\
\dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial æ_i}{\partial \lambda_i}
\end{cases}
\tag{3.172}
$$

故

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_x=\varphi_y\dfrac{I_{x_1}-I_{z_1}}{I_{y_1}}\omega_{z_1}+\varphi_z\dfrac{I_{y_1}-I_{x_1}}{I_{z_1}}\omega_{y_1}-\dfrac{1}{2}P_{1E}\\ \dot{\varphi}_y=\varphi_x\dfrac{I_{z_1}-I_{y_1}}{I_{x_1}}\omega_{z_1}+\varphi_z\dfrac{I_{y_1}-I_{x_1}}{I_{z_1}}\omega_{x_1}-\dfrac{1}{2}P_{2E}\\ \dot{\varphi}_z=\varphi_x\dfrac{I_{z_1}-I_{y_1}}{I_{x_1}}\omega_{y_1}+\varphi_y\dfrac{I_{x_1}-I_{z_1}}{I_{y_1}}\omega_{x_1}-\dfrac{1}{2}P_{3E}\end{cases}\tag{3.173}$$

$$\begin{cases}2\dot{\Psi}_0=-\Psi_1\omega_{x_1}-\Psi_2\omega_{y_1}-\Psi_3\omega_{z_1}\\ 2\dot{\Psi}_1=\Psi_0\omega_{x_1}-\Psi_2\omega_{z_1}+\Psi_3\omega_{y_1}\\ 2\dot{\Psi}_2=\Psi_0\omega_{y_1}+\Psi_1\omega_{z_1}-\Psi_3\omega_{x_1}\\ 2\dot{\Psi}_3=\Psi_0\omega_{z_1}-\Psi_1\omega_{y_1}+\Psi_2\omega_{x_1}\end{cases}\tag{3.174}$$

由庞特里亚金极大原理知最优控制必要条件是控制变量 M_{x_1}、M_{y_1}、M_{z_1}在允许控制集合M中使哈密顿函数达到最大值，即

$$\max_{M_K\in M}æ(\omega_1,\lambda,\varphi,\Psi,M_K)=æ^*(\omega_1,\lambda,\varphi,\Psi,M_K^*)\tag{3.175}$$

联立状态方程(3.167)、(3.168)和共轭方程(3.173)、(3.174)共 14 个方程，包含 ω_{x_1}，ω_{y_1}，ω_{z_1}，λ_0，λ_1，λ_2，λ_3，φ_x，φ_y，φ_z，ψ_0，ψ_1，ψ_2，ψ_3等14个未知数，其中控制变量M_{x_1}、M_{y_1}、M_{z_1}由必要条件(3.175)式确定。已知14个边界条件 λ_{t_0}、ω_0、λ_T、ω_T. 解之，即可求出最优控制。这是典型的两点边值问题，计算起来是非常复杂的。这里不再叙述。

(2) 能量消耗最小，即当时间T固定时，要求

$$G=\int_{t_0}^{T}\left(\frac{|M_{x_1}|}{I_{x_1}}+\frac{|M_{y_1}|}{I_{y_1}}+\frac{|M_{z_1}|}{I_{z_1}}\right)dt\tag{3.176}$$

值最小。

此时，需在状态方程中补充方程

$$\dot{G}=\frac{|M_{x_1}|}{I_{x_1}}+\frac{|M_{y_1}|}{I_{y_1}}+\frac{|M_{z_1}|}{I_{z_1}} \tag{3.177}$$

如果设其共轭变量为 g，则哈密顿函数为

$$æ=æ_d+æ_K+g\left(\frac{|M_{x_1}|}{I_{x_1}}+\frac{|M_{y_1}|}{I_{y_1}}+\frac{|M_{z_1}|}{I_{z_1}}\right) \tag{3.178}$$

则
$$\dot{g}=-\frac{\partial æ}{\partial G}=0 \tag{3.179}$$

此时性能指标可写为

$$J=\int_0^T\left(\frac{|M_{x_1}|}{I_{x_1}}+\frac{|M_{y_1}|}{I_{y_1}}+\frac{|M_{z_1}|}{I_{z_1}}\right)dt=G(T) \tag{3.180}$$

起始条件：$t=t_0$ 时，$G=0$

终端横截条件：$g(T)=-\left.\frac{\partial G(T)}{\partial G}\right|_T=-1$

将方程(3.177)和(3.179)补充在方程组中，共16个方程，有16个边界条件，解之，即可求出能量消耗最小的最优控制。

第四章　航天飞行器姿态控制的四元数法

§1　航天飞行器姿态稳定与姿态控制

姿态稳定和姿态控制是航天飞行器的重要课题。为了实现轨道控制，完成飞行器各项飞行任务，都要通过控制飞行器的姿态来实现。

在航天飞行器发射后的上升入轨段，首先要通过姿态控制系统保持飞行器的三轴稳定；然后利用俯仰角和偏航角的改变来实现程序飞行。当入轨前进行闭路制导时，姿态控制系统根据制导规律所要求的发动机推力方向对飞行器姿态进行控制，予以实现。

在轨道运行段，根据飞行器的飞行任务，对姿态有不同的要求。如果飞行器是人造卫星或空间站，则入轨后往往需要将飞行器姿态稳定在某一方向上。例如：侦察卫星在飞行过程中要求其探测轴对准地球；天体观测卫星要求其观测轴对准欲测星体；如果航天飞行器是作为天地往返运输工具，为空间站运送人员和物资，则需与空间站进行交会、对接；均需要进行一联串的姿态控制。前者是姿态稳定问题，后者是姿态控制问题。

卫星和空间站姿态稳定的特点是：往往要求控制系统在飞行器整个工作寿命中进行控制，这种控制是长期而持续的，但要求的控制力矩较小。对大多数卫星来说，通常采用双自旋稳

定系统，利用飞轮角动量矢量的改变来控制星体的角动量，并利用环境力矩（重力梯度力矩，地磁力矩等）对飞轮进行卸载。

姿态控制一般是短暂的过程，其所要求的力矩较大。当然我们可以利用自然环境的物理力矩源，如重力梯度力矩、地磁力矩、气动力力矩、太阳光压力矩等进行姿态控制。但这些量都是小量，对于在短暂时间内需要作大的姿态变换来说是不适用的。通常需要利用安装在飞行器上的喷嘴控制系统来进行控制。以“阿波罗”飞船为例，其喷嘴在飞行器上的布置示意图如图4.1所示。16个喷嘴分布在星体质心的四周。当其中某一喷

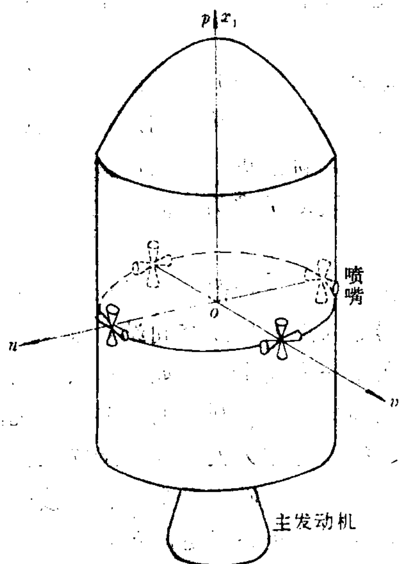


图 4.1 喷嘴在星体上布置示意图

嘴工作时，产生推力，对星体产生力矩以改变星体姿态。其推力作用方向示意图如图4.2所示。图中 $ox_1y_1z_1$ 为体坐标系，o 为

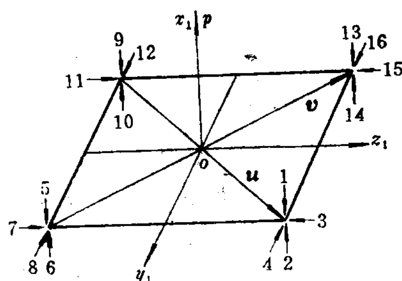


图 4.2 喷嘴推力方向示意图

质心，ox_1为星体纵轴。16个喷嘴布置在oy_1z_1平面内，图中箭头方向表示喷嘴的推力方向，则此16个喷嘴按其作用来说，可以分成两组。

（1）产生滚动力矩M_{x_1}和法向力Z_1、Y_1的喷嘴是：3,4,7,8,11,12,15,16.

（2）产生绕oy_1和oz_1轴的转动力矩M_{x_1}、M_{y_1}和轴向力X_1的喷嘴是：1,2,5,6,9,10,13,14.

由图4.2可以看出，喷嘴在这样的布置下，有如下的特点，当一个喷嘴工作时，只能对ox_1轴、ou轴或ov轴产生力矩；而不能对oy_1轴、oz_1轴产生力矩，但对ou、ov轴不能同时有四个喷嘴产生力矩的情况。

当然，不同的飞行器其喷嘴的个数和在星体上的布置情况都是不相同的，“阿波罗”的喷嘴布置比较典型，所以本章将以“阿波罗”喷嘴控制系统为例，研究航天飞行器的姿态控制问题。

通过前几章的介绍，已知作为误差信号，欧拉角和四元数完全是对应的，因此，从原则上讲，凡是用欧拉角作为误差信号的控制均可以转换为四元数控制。

§2 姿态控制系统误差信号的组成及其交联影响

无论是姿态稳定还是姿态控制，都可以看成是将星体坐标系$ox_1y_1z_1$通过控制转换到需要坐标系$ox^*y^*z^*$的问题。敏感元件敏感体坐标系对需要坐标系的偏差，根据控制规律组成控制指令，启动执行元件产生控制力矩，控制飞行器以减小偏差。其结构方块图如图4.3所示。

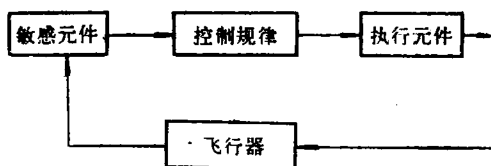


图 4.3 姿态控制结构方块图

敏感元件为测角和角速度系统，对运载火箭来讲，往往是三自由度陀螺仪和速率陀螺仪，对航天飞行器来讲，往往利用红外地平仪、太阳敏感器和星敏感器。

执行元件是根据控制信号产生力矩以改变飞行器姿态的环节，产生控制力矩的方法有两大类。

(1) 利用环境特征所产生的力矩。有：①引力梯度力矩；②地磁力矩；③气动力力矩；④太阳光压力矩。

飞行器上携带的力矩产生器，如：①喷嘴控制系统；②飞轮控制系统。飞轮系统是通过改变飞轮的角动量矢量来吸收飞行器多余的角动量矢量，从而通过控制星体的角动量来达到控制星体姿态的目的。飞轮角动量相对于星体的变化率是系统的内力矩，它和上述的其他力矩不同。前已论述，环境力矩很小，

不能在短时间内完成较大的姿态变化。飞轮控制系统主要用于姿态稳定与定向。本章主要研究喷嘴控制系统。姿态控制的一个重要问题是如何组成控制误差信号。如前所述，可以利用两坐标系之间的欧拉角或四元数来表示两坐标系之间的误差。以下分别进行研究。

一、欧拉角法

回到第三章§1节，如图4.4，如果取欧拉角$\Delta\varphi$、$\Delta\psi$、$\Delta\gamma$作

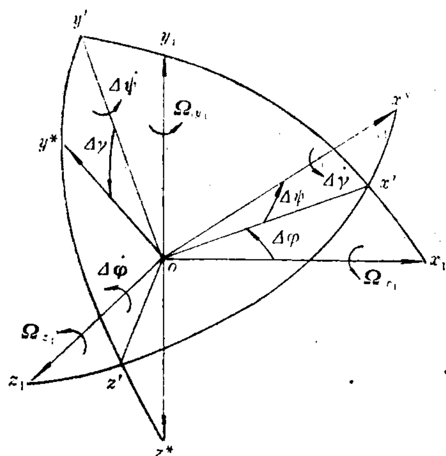


图 4.4 误差角示意图

为误差信号。Ω_{x_1}、Ω_{y_1}、Ω_{z_1}为相对角速度，则

$$
\begin{cases}
\Delta\dot{\varphi}=\Omega_{z_1}+(\Omega_{x_1}\cos\Delta\varphi+\Omega_{y_1}\sin\Delta\varphi)\mathrm{tg}\Delta\psi\\
\Delta\dot{\psi}=-\Omega_{x_1}\sin\Delta\varphi+\Omega_{y_1}\cos\Delta\varphi\\
\Delta\dot{\gamma}=\dfrac{\Omega_{x_1}\cos\Delta\varphi+\Omega_{y_1}\sin\Delta\varphi}{\cos\Delta\psi}
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

式中角速度Ω_{x_1}、Ω_{y_1}、Ω_{z_1}是由于喷嘴启动，作用在星体上力矩而确定的。把两个喷嘴所产生的力矩作为一个单位，且设星体绝对角速度为ω_{x_1}、ω_{y_1}、ω_{z_1}，则

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{x_1}=\left(\dfrac{I_{y_1}-I_{z_1}}{I_{x_1}}\right)\omega_{y_1}\omega_{z_1}+\dfrac{M_{x_1}}{I_{x_1}} \\ \dot{\omega}_{y_1}=\left(\dfrac{I_{z_1}-I_{x_1}}{I_{y_1}}\right)\omega_{x_1}\omega_{z_1}+\dfrac{M_{y_1}}{I_{y_1}} \\ \dot{\omega}_{z_1}=\left(\dfrac{I_{x_1}-I_{y_1}}{I_{z_1}}\right)\omega_{x_1}\omega_{y_1}+\dfrac{M_{z_1}}{I_{z_1}} \end{cases} \tag{4.2}$$

式中$[(I_{y_1}-I_{z_1})/I_{x_1}]\omega_{y_1}\omega_{z_1}$、$[(I_{z_1}-I_{x_1})/I_{y_1}]\omega_{x_1}\omega_{z_1}$、$[I_{x_1}-I_{y_1}/I_{z_1}]\omega_{x_1}\omega_{y_1}$为惯性交联项，是由于沿三个惯性主轴的转动惯量不等而引起的。可以看出，当沿某一轴方向产生力矩时，不仅引起该轴角速度变化，而且引起其他两轴角速度的变化。

如果不用惯性主轴$ox_1y_1z_1$作为控制轴，而用如图4.2所示的$opuv$作为控制轴。令

$$a_{y_1}=\frac{M_{y_1}}{I_{y_1}},\quad a_{z_1}=\frac{M_{z_1}}{I_{z_1}};\quad a_u=\frac{M_u}{I_u},\quad a_v=\frac{M_v}{I_v} \tag{4.3}$$

则

$$\begin{cases} a_u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a_{z_1}+a_{y_1}) \\ a_v=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a_{z_1}-a_{y_1}) \end{cases} \tag{4.4}$$

又因为

$$\begin{cases} a_{y_1}=\dfrac{M_{y_1}}{I_{y_1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2I_{y_1}}(M_u-M_v) \\ a_{z_1}=\dfrac{M_{z_1}}{I_{z_1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2I_{z_1}}(M_u+M_v) \end{cases} \tag{4.5}$$

故

$$\begin{cases} a_u = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{I_{y_1}+I_{z_1}}{I_{y_1}I_{z_1}}M_u + \dfrac{I_{y_1}-I_{z_1}}{I_{y_1}I_{z_1}}M_v\right) \\ a_v = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{I_{y_1}-I_{z_1}}{I_{y_1}I_{z_1}}M_u + \dfrac{I_{y_1}+I_{z_1}}{I_{y_1}I_{z_1}}M_v\right) \end{cases} \tag{4.6}$$

可以看出，当 $I_{y_1} \neq I_{z_1}$ 时，u、v 轴产生相互交联，为了打破此交联，采用如下方法进行控制。

如图4.5，引入非正交系u'、v'轴，它们与 u、v 轴之间的夹角均为γ，则

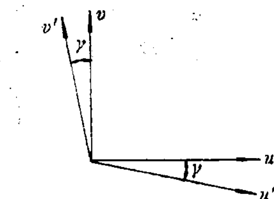


图 4.5 交联补偿γ角示意图

$$\begin{aligned} a_{u'} &= a_u\cos\gamma - a_v\sin\gamma \\ &= M_u\left(\frac{I_{y_1}+I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\cos\gamma - \frac{I_{y_1}-I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\sin\gamma\right) + M_v\left(\frac{I_{y_1}-I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\cos\gamma \right. \\ &\quad \left. - \frac{I_{y_1}+I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\sin\gamma\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

为了打破交联，需使

$$\frac{I_{y_1}-I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\cos\gamma - \frac{I_{y_1}+I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\sin\gamma = 0$$

故

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{I_{y_1}-I_{z_1}}{I_{y_1}+I_{z_1}} \tag{4.8}$$

则

$$a_{u'} = M_u\left(\frac{I_{y_1}+I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\cos\gamma - \frac{I_{y_1}-I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\sin\gamma\right) \tag{4.9}$$

同理

$$\begin{aligned} a_{v'} &= -a_u\sin\gamma + a_v\cos\gamma \\ &= M_u\left(\frac{I_{y_1}-I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\cos\gamma - \frac{I_{y_1}+I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\sin\gamma\right) \end{aligned}$$

$$+M_v\left(\frac{I_{y_1}+I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\cos\gamma-\frac{I_{y_1}-I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\sin\gamma\right) \tag{4.10}$$

将(4.8)式代入(4.10)式，可得：

$$a_{v'}=M_v\left(\frac{I_{y_1}+I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\cos\gamma-\frac{I_{y_1}-I_{z_1}}{2I_{y_1}I_{z_1}}\sin\gamma\right) \tag{4.11}$$

故当$I_{y_1}\neq I_{z_1}$时，利用非正交系$opu'v'$代替$opuv$来控制，可以消除由于转动惯量不对称而引起的交联。因

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\gamma\right)=\frac{I_{y_1}}{I_{z_1}}$$

故

$$\gamma=\mathrm{arctg}\left(\frac{I_{y_1}}{I_{z_1}}\right)-\frac{\pi}{4} \tag{4.12}$$

回到(4.2)式，式中交联项与其他两项相比，数量较小，因此可近似认为

$$\begin{cases}\dot{\omega}_{x_1}\approx\dfrac{M_{x_1}}{I_{x_1}}=a_{x_1}\\[2ex]\dot{\omega}_{y_1}\approx\dfrac{M_{y_1}}{I_{y_1}}=a_{y_1}\\[2ex]\dot{\omega}_{z_1}\approx\dfrac{M_{z_1}}{I_{z_1}}=a_{z_1}\end{cases} \tag{4.13}$$

在飞行过程中，转动惯量变化很小，而喷嘴产生的力矩为常数，故可以认为a_{x_1}、a_{y_1}、a_{z_1}为常数，则

$$\begin{cases}\omega_{x_1}=\omega_{x_{10}}+a_{x_1}t\\\omega_{y_1}=\omega_{y_{10}}+a_{y_1}t\\\omega_{z_1}=\omega_{z_{10}}+a_{z_1}t\end{cases} \tag{4.14}$$

故喷嘴控制的结果，只能引起星体绝对角速度的变化。如果设需要坐标系$ox^*y^*z^*$对惯性坐标系旋转角速度为ω^*，则

$$\begin{cases}\Omega_{x_1}=\omega_{x_{10}}-\omega_{x_1}^*+a_{x_1}t\\ \Omega_{y_1}=\omega_{y_{10}}-\omega_{y_1}^*+a_{y_1}t\\ \Omega_{z_1}=\omega_{z_{10}}-\omega_{z_1}^*+a_{z_1}t\end{cases}\tag{4.15}$$

$\omega_{x_1}^*$、$\omega_{y_1}^*$、$\omega_{z_1}^*$取决于瞬间需要姿态的变化，认为是已知的，通常变化比较缓慢。由(4.15)式可以看出，当喷嘴产生控制力矩时，引起星体绝对角速度的变化，因而改变了体坐标系相对于需要坐标系的相对角速度，来消除体坐标系对需要坐标系之间的误差角。但由(4.1)式可以看出，某一轴的相对角速度变化，不仅引起相应的欧拉角变化，其他两个欧拉角也在变，这样就引起交联。交联的结果，影响了误差衰减速度。已经证明用欧拉角作为误差信号控制是稳定的，故误差最终会衰减为零，完成定位控制。

当误差角和角速度都比较小时，由(4.1)式

$$\begin{cases}\Delta\dot{\varphi}\approx\Omega_{z_1}\\ \Delta\dot{\psi}\approx\Omega_{y_1}\\ \Delta\dot{\gamma}\approx\Omega_{x_1}\end{cases}\tag{4.16}$$

则交联解除，三通道互相独立。通常利用误差相平面来产生控制喷嘴开关的信号，此时相平面（$\Delta\varphi$，$\Delta\dot{\varphi}$）产生a_{z_1}信号，（$\Delta\psi$，$\Delta\dot{\psi}$）产生a_{y_1}信号，（$\Delta\gamma$，$\Delta\dot{\gamma}$）产生a_{x_1}信号。关于相平面内喷嘴开关控制规律，下一节将详细研究。

二、四元数法

如果设将体坐标系$ox_1y_1z_1$转换成需要坐标系$ox^*y^*z^*$的四元数为λ，则

$$\dot{\lambda}=\frac{1}{2}\lambda_*\omega_*^*-\frac{1}{2}\omega_1*\lambda=\frac{1}{2}(\omega_1^*-\omega_1)*\lambda\tag{4.17}$$

式中下标“*”号表示在$ox^*y^*z^*$各轴上投影，

下标“1”号表示在$ox_1y_1z_1$各轴上投影。

写成标量形式

$$
\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
0, & -\omega_{x*}^{*}+\omega_{x_1}, & -\omega_{y*}^{*}+\omega_{y_1}, & -\omega_{z*}^{*}+\omega_{z_1}\\
\omega_{x*}^{*}-\omega_{x_1}, & 0, & \omega_{z*}^{*}+\omega_{z_1}, & -\omega_{y*}^{*}-\omega_{y_1}\\
\omega_{y*}^{*}-\omega_{y_1}, & -\omega_{z*}^{*}-\omega_{z_1}, & 0, & \omega_{x*}^{*}+\omega_{x_1}\\
\omega_{z*}^{*}-\omega_{z_1}, & -\omega_{y*}^{*}+\omega_{y_1}, & -\omega_{x*}^{*}-\omega_{x_1}, & 0
\end{bmatrix}
\cdot\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} \tag{4.18}
$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
0, & -\omega_{x_1}^{*}+\omega_{x_1}, & -\omega_{y_1}^{*}+\omega_{y_1}, & -\omega_{z_1}^{*}+\omega_{z_1}\\
\omega_{x_1}^{*}-\omega_{x_1}, & 0, & -\omega_{z_1}^{*}+\omega_{z_1}, & \omega_{y_1}^{*}-\omega_{y_1}\\
\omega_{y_1}^{*}-\omega_{y_1}, & \omega_{z_1}^{*}-\omega_{z_1}, & 0, & -\omega_{x_1}^{*}+\omega_{x_1}\\
\omega_{z_1}^{*}-\omega_{z_1}, & -\omega_{y_1}^{*}+\omega_{y_1}, & \omega_{x_1}^{*}-\omega_{x_1}, & 0
\end{bmatrix}
\cdot\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} \tag{4.19}
$$

如果取 λ_1、λ_2、λ_3 作为误差信号，即相平面（λ_1，$\dot{\lambda}_1$）产生 a_{x_1}，引起ω_{x_1}的变化；相平面（λ_2，$\dot{\lambda}_2$）产生 a_{y_1}，引起 ω_{y_1} 的变化；相平面（λ_3，$\dot{\lambda}_3$）产生a_{z_1}，引起ω_{z_1}的变化。由(4.18)或(4.19)式可以看出，当ω_{x_1}变化时，不仅引起 λ_1 的变化，同时也引起λ_2、λ_3的变化；ω_{y_1}和ω_{z_1} 的情况相同。和欧拉角作为误差信号一样，产生了交联。已经证明利用四元数分量作为误差信号，控制是稳定的，故最后可达到定位状态 $\lambda_0=1$，$\lambda_1=$

$\lambda_2=\lambda_3=0$. 当λ_1、λ_2、λ_3都是小量时

$$\begin{cases}\lambda_1\approx\dfrac{1}{2}(\omega_{x^*}^*-\omega_{x_1})\lambda_0\approx\dfrac{1}{2}(\omega_{x_1}^*-\omega_{x_1})\lambda_0\\ \lambda_2\approx\dfrac{1}{2}(\omega_{y^*}^*-\omega_{y_1})\lambda_0\approx\dfrac{1}{2}(\omega_{y_1}^*-\omega_{y_1})\lambda_0\\ \lambda_3\approx\dfrac{1}{2}(\omega_{z^*}^*-\omega_{z_1})\lambda_0\approx\dfrac{1}{2}(\omega_{z_1}^*-\omega_{z_1})\lambda_0\end{cases}\tag{4.20}$$

则交联解除，三通道互相独立。

§3 欧拉角作为误差信号时，喷嘴控制规律的确定

喷嘴是根据姿态控制系统输出的误差信号来进行工作的。通常利用误差相平面来分析喷嘴的控制规律。所谓误差相平面即是：以实际运动参量对理想运动参量的偏差来作为相平面的横坐标，以E表之。如果是以欧拉角作为误差信号，则E代表俯仰角偏差$\Delta\varphi$、偏航角偏差$\Delta\psi$和滚动角偏差$\Delta\gamma$. 而用偏差的变化率作为相平面的纵坐标，以$\dot{E}$表之。对欧拉角来说，则$\dot{E}$代表$\Delta\dot{\varphi}$、$\Delta\dot{\psi}$、$\Delta\dot{\gamma}$.

设以M表示某一轴的控制力矩，I为相对于该轴的转动惯量。a为相应角加速度，E为垂直于此轴的平面内的误差角，$\dot{E}$为姿态误差角速度，则

$$\frac{d\dot{E}}{dt}=\frac{M}{I}=a\tag{4.21}$$

由于飞行器在飞行过程中，转动惯量I变化很小，而由喷嘴所产生的力矩M为常数，故可近似认为a为常数。

由(4.21)式

$$\dot{E}^2-\dot{E}_0^2=2a(E-E_0)\tag{4.22}$$

如果$a=0$，即不进行控制，则

$$\dot{E}=\dot{E}_0 \qquad (4.23)$$

则相轨迹为相平面上一条直线，如图4.6所示。

如果$a\neq0$，即进行控制，则

$$E=E_0+\frac{\dot{E}^2-\dot{E}_0^2}{2a} \qquad (4.24)$$

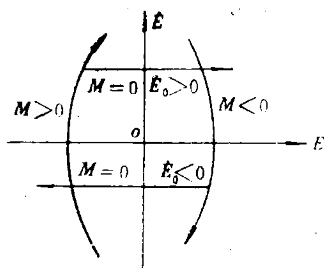


图 4.6　相轨迹示意图

为相平面（E，$\dot{E}$）上的抛物线。

当$M>0$，$a>0$时，抛物线自下而上，对应于不同的起始条件(E_0，$\dot{E}_0$)，有一族自下而上的抛物线充满相平面。

当$M<0$，$a<0$时，抛物线自上而下，对应于不同的起始条件(E_0，$\dot{E}_0$)，有一族自上而下的抛物线充满相平面。

由图4.6可以看出，无论力矩M取何值，相点轨迹的特点是仅有一个运动方向，其沿着直线和抛物线的轨迹总是顺时针方向。

现在的问题是在姿态控制过程中，我们期望得到什么样的相轨迹。为了保持运动稳定，应使相轨迹在相平面上形成极限环，亦即是相轨迹组成一“封闭曲线”，而一切在此封闭曲线外边开始的相点，均终止在此“封闭曲线”上。此时，随着时间的递增，误差角和误差角速度总是约束在一定的范围之内。

在对航天飞行器进行姿态控制时，由于种种原因，可能存在干扰力矩，特别是当变轨发动机工作时，由于重心偏移和推力偏心，会产生干扰力矩。因此，要分两种情况来研究喷嘴控制规律。

一、干扰力矩为零时，喷嘴控制规律的选择

当干扰力矩为零时，所期望的轨线是：由误差角和角速度

所确定的相轨线，形成稳定极限环。从节省燃料的观点出发，并且希望此极限环包含一死区，在此区域内，喷嘴不工作。根据以上原则，如图4.7的开关曲线，即可满足要求，图中$ABCD$

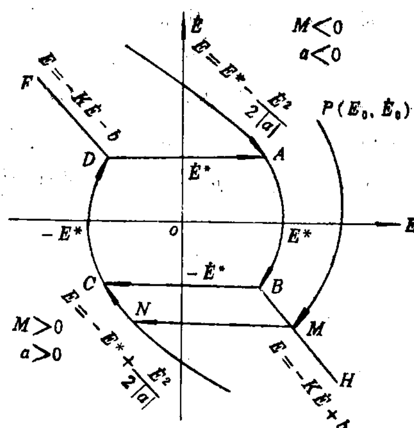


图 4.7 开关曲线图

之间是死区，控制开关曲线由两条抛物线和两条直线组成，其方程分别为

$$AB: E=E^*-\frac{\dot{E}^2}{2|a|} \tag{4.25}$$

$$CD: E=-E^*+\frac{\dot{E}^2}{2|a|} \tag{4.26}$$

$$FD: E=-K\dot{E}-b \tag{4.27}$$

$$HB: E=-K\dot{E}+b \tag{4.28}$$

则此四条线将相平面分成三部分。凡相点落在AB、HB之右的，产生负力矩；落在CD、FD之左的，产生正力矩；落在AB、HB或CD、FD之间的关闭发动机。如图4.7所示，设起始点为$(E_0, \dot{E}_0)$，则产生负力矩，相点沿PM抛物线运动至M点与HB直线相遇，立即关闭发动机；相点沿直线MN运动

至N点与抛物线CD相遇，产生正力矩；相点沿抛物线CD运动至D与直线FD相遇，再关闭发动机；相点沿直线DA运动至A与抛物线AB相遇，产生负力矩；相点沿抛物线AB运动至B与直线HB相遇，关闭发动机；相点沿BC直线运动至C点与抛物线CD相遇，形成了极限环$ABCDA$。可以看出，抛物线CD是正开线，抛物线AB是负开线，直线FD和HB是闭线。其中K为斜率，b为截矩，都是待定系数。研究图4.7的开关曲线，可以看出剩余角速度$\dot{E}^*$愈小，愈有利于节省燃料，故选择关线方程为

$$\begin{cases} E = -\dot{E} - E^* \\ E = -\dot{E} + E^* \end{cases} \tag{4.29}$$

如图4.8所示，将直线交点移至横轴上，并引入$\dot{E} = \pm\dot{E}_1^*$，

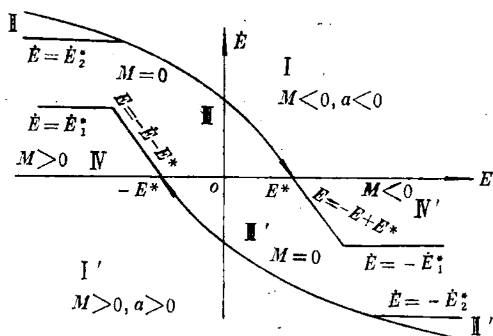


图 4.8 改进的开关曲线图

$\dot{E} = \pm\dot{E}_2^*$是为了限制误差角速度。开关曲线将相平面上、下半平面各分成四个区域。上下两半平面是完全对称的，可利用如图4.9的结构图来进行控制，则可形成围绕$(-E^*, 0)$，$(E^*, 0)$两点的极限环。

在选择喷嘴控制规律开关曲线时，有两个性能指标需要考虑，即相点进入极限环的时间是否最快和在相点进入极限环以

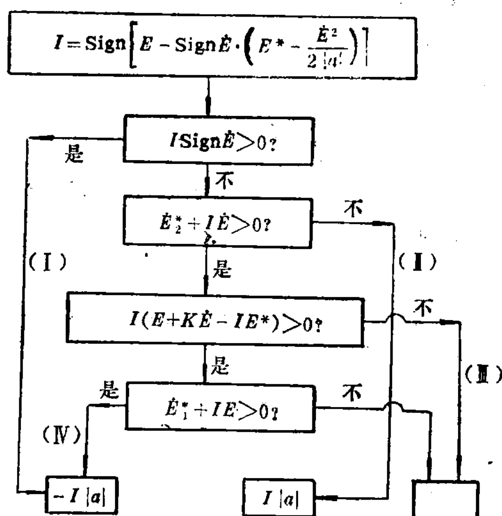


图 4.9 改进的开关曲线计算流程

及在以后正常的控制中，燃料是否最省。这两个指标是互相对立而又统一的。上面所选择的控制规律，就是时间和燃料消耗之间的折中方案。但由于闭线是任意选择的，故不是最优折中方案。下面利用庞特里亚金极大原理来研究最优控制开关曲线。

1. 时间最优的喷嘴控制规律

设在起始瞬间$E=E_0$，$\dot{E}=\dot{E}_0$。所谓时间最优的控制规律即是选择一种喷嘴开关曲线，最快地使$(E_0, \dot{E}_0)\to(0, 0)$。

由方程(4.21)，如果以u表示控制作用量，则u的取值为a、0、$-a$。将方程(4.21)写成状态方程标准形式，则

$$\begin{cases}\dfrac{dE}{dt}=\dot{E}\\[2ex]\dfrac{d\dot{E}}{dt}=u\end{cases}\qquad(4.30)$$

起始条件：$t=t_0$时，$E=E_0$，$\dot{E}=\dot{E}_0$

终端条件：$t=t_f$时，$E=\dot{E}=0$

最优性能指标

$$J_{\min}=\int_{t_0}^{t_f}dt=t_f-t_0 \tag{4.31}$$

这是终端固定，时间自由的最优控制问题。如果设共轭变量为ψ_1、ψ_2，则哈密顿函数为

$$H=\psi_1\dot{E}+\psi_2 u \tag{4.32}$$

由极大原理知最优控制的必要条件是哈密顿函数最大，由(4.32)式知最优控制

$$u^*=|a|\,\mathrm{sign}\,\psi_2(t) \tag{4.33}$$

由正则方程知

$$(\dot{\psi}_1,\ \dot{\psi}_2)=-\frac{\partial H}{\partial(E,\ \dot{E})} \tag{4.34}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi_1}{dt}=0\\[2ex]\dfrac{d\psi_2}{dt}=-\psi_1\end{cases} \tag{4.35}$$

则

$$\begin{cases}\psi_1=C_1\\ \psi_2=C_2-C_1 t\end{cases} \tag{4.36}$$

故$\psi_2(t)$是t的线性函数。在$t_0\leqslant t\leqslant t_f$区间内，$\psi_2(t)$的符号最多只能变号一次，且每一个最优控制的取值都是$|a|$或$-|a|$，并在“不多于两个区间上为常数”的逐段常值函数。

当$u=|a|$时，

$$E=\frac{\dot{E}^2}{2|a|}+C_0$$

为一族抛物线，如图4.10所示。

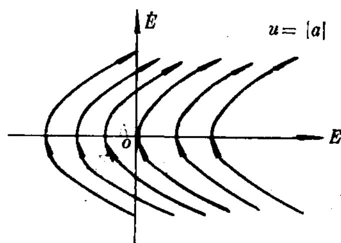


图 4.10　对应于正力矩时的曲线族

当$u=-|a|$时，

$$E=-\frac{\dot{E}^2}{2|a|}+C_1$$

为一族抛物线，如图4.11所示。

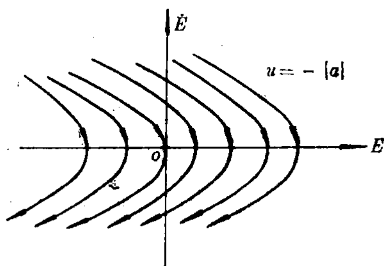


图 4.11　对应于负力矩时的曲线族

因为每一个最优控制u^*是逐段常值函数，它取值$|a|$或$-|a|$，并且取常值函数区间不多于两个。考虑到终端条件，其最后一段轨线必然为通过原点的抛物线的一部分，则可能有两种情况。

(1) 开始时，$\Psi_2=C_2-C_1t<0$，则$u=-|a|$，相点沿抛物线

$$E=E_0-\frac{\dot{E}^2-\dot{E}_0^2}{2|a|}$$

运动至m点，$\Psi_2=C_2-C_1t_m=0$，控制变号，相点沿

$$E=\frac{\dot{E}^2}{2|a|} \tag{4.37}$$

运动至o点。如图4.12.

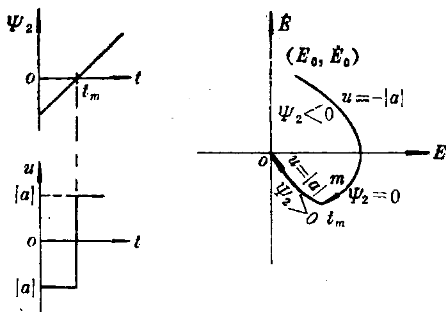


图 4.12 $\psi_{20}>0$时轨线示意图

(2) 开始时，

$$\Psi_2=C_2-C_1t>0$$

则$u=|a|$，相点沿抛物线

$$E=E_0+\frac{\dot{E}^2-\dot{E}_0^2}{2|a|}$$

运动至n点，$\Psi_2=C_2-C_1t_n=0$，控制变号，相点沿抛物线

$$E=-\frac{\dot{E}^2}{2|a|} \tag{4.38}$$

运动至o点，如图4.13所示。

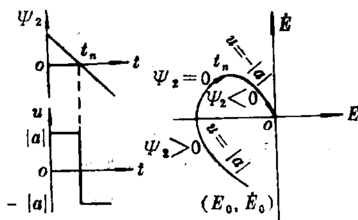


图 4.13 $\psi_{20}<0$时轨线示意图

当起始条件变化时，全部最优相轨线如图4.14所示，凡起

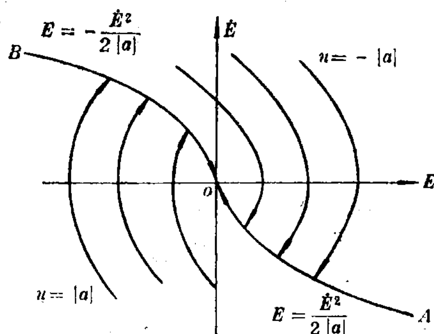


图 4.14 最优开关曲线

始条件使

$$\Psi_2=C_2-C_1t_0<0$$

$$u_0=-|a|$$

的，均沿抛物线

$$E=E_0-\frac{\dot{E}^2-\dot{E}_0^2}{2|a|}$$

运动，与Ao相交，然后控制变号，沿Ao趋于原点。凡是起始条件使

$$\Psi_2=C_2-C_1t_0>0,\ u_0=|a|$$

的，均沿抛物线

$$E=E_0+\frac{\dot{E}^2-\dot{E}_0^2}{2|a|}$$

运动，与Bo相交，然后控制变号，沿Bo趋于原点。可以看出，抛物线Bo和Ao将相平面分为两部分，凡是相点落在两抛物线之右的，产生负力矩进行控制；凡是相点落在两抛物线之左的，产生正力矩；当相点与抛物线Bo或Ao相交时，控制变

号。此种开关曲线，可以保证误差衰减最快，但不能保证燃烧消耗最小，特别是没有设置死区，当误差衰减到原点时，由于控制周期是有限的，喷嘴将处于不断的正反开启状态，是非常不利的。

2. 考虑燃料消耗和误差衰减时间最快时的喷嘴控制规律

如果在考虑误差衰减最快的同时，还考虑到燃料消耗问题，则是混合性能指标的最优控制。此时

$$J_{\min}=\int_{t_0}^{t_f}(K+|U|)dt \tag{4.39}$$

此时哈密顿函数为

$$æ=\Psi_0(K+|U|)+\Psi_1\dot{E}+\Psi_2 U \tag{4.40}$$

应用极大原理，$\Psi_0=-1$，则

$$æ=\Psi_1\dot{E}+\Psi_2 U-K-|U| \tag{4.41}$$

为了使哈密顿函数æ为极大，由(4.41)式，应使

$$\Psi_2 U-|U|\Longrightarrow \max \tag{4.42}$$

则最优控制

$$u^*(t)=\begin{cases}|a| & \text{当}\Psi_2(t)>1\text{时}\\ 0 & \text{当}|\Psi_2(t)|\leqslant 1\text{时}\\ -|a| & \text{当}\Psi_2(t)<-1\text{时}\end{cases} \tag{4.43}$$

已知共轭方程为

$$\begin{cases}\dfrac{d\Psi_1}{dt}=0\\ \dfrac{d\Psi_2}{dt}=-\Psi_1\end{cases} \tag{4.44}$$

$$\begin{cases}\Psi_1=C_1\\ \Psi_2=C_2-C_1 t\end{cases} \tag{4.45}$$

则 $\Psi_2(t)$ 只可能变号一次。

如果要求将$(E_0,\dot{E}_0)\longrightarrow(0,0)$，设起始瞬时$\Psi_2<-1$，如图4.15，

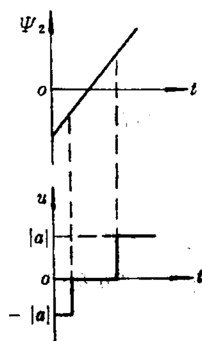


图 4.15 Ψ_2变化图

$u=-|a|$，则相点将沿抛物线

$$E=E_0-\frac{\dot{E}^2-\dot{E}_0^2}{2|a|} \tag{4.46}$$

运动。至m点时

$$\Psi_2(t_m)=-1$$

由(4.43)式，此时$u=0$. 则相点将沿$\dot{E}=\dot{E}_m$的直线运动至n点与抛物线Ao相交，此时

$$\Psi_2(t_n)=1$$

由(4.43)式，此时$u=|a|$，相点沿抛物线

$$E=\frac{\dot{E}^2}{2|a|}$$

趋于(0,0)点，如图4.16所示。可以看出，由于考虑到燃料消

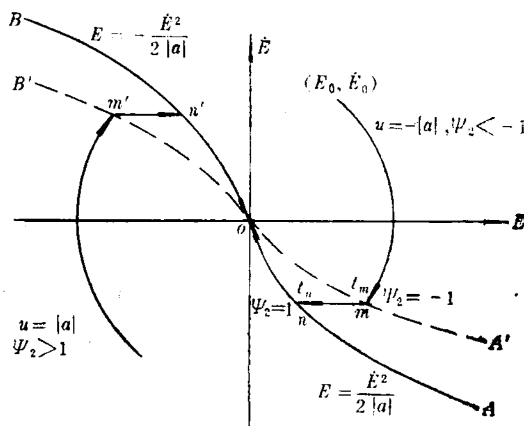


图 4.16 考虑燃料消耗的最优开关曲线

耗，引入了死区。现在的问题是：当起始条件变化时，m点应该沿什么曲线变化，即闭线的方程是什么。

已知在m点和n点满足

$$\begin{cases} C_2 - C_1 t_m = -1 \\ C_2 - C_1 t_n = 1 \end{cases} \tag{4.47}$$

故
$$t_n - t_m = -\frac{2}{C_1} \tag{4.48}$$

另一方面，由极大原理知，对固定端点自由时间，沿最优轨线，哈密顿函数$\mathscr{H}(t)=0$. 当$u=0$时，由(4.41)式

$$C_1 \dot{E} - K = 0 \tag{4.49}$$

$$C_1 = \frac{K}{\dot{E}} \tag{4.50}$$

故
$$t_n - t_m = -\frac{2}{K}\dot{E}_m \tag{4.51}$$

因
$$\dot{E}_n = \dot{E}_m$$

$$E_n = E_m + (t_n - t_m)\dot{E}_m = \frac{\dot{E}_n^2}{2|a|}$$

故
$$E_m = \left(\frac{1}{2|a|} + \frac{2}{K}\right)\dot{E}_m^2 \tag{4.52}$$

同理，如果起始瞬间$\Psi_2>1$，$u=|a|$，则

$$E_{m'} = -\left(\frac{1}{2|a|} + \frac{2}{K}\right)\dot{E}_{m'}^2 \tag{4.53}$$

故对于混合指标，将（E_0，$\dot{E}_0$）控制至原点（0，0）的喷嘴控制开关曲线由四条抛物线组成。如图4.16所示。

$$Ao: \quad E = \frac{\dot{E}^2}{2|a|} \tag{4.54}$$

$$Bo: \quad E = -\frac{\dot{E}^2}{2|a|} \tag{4.55}$$

$$A'o: \quad E = \left(\frac{1}{2|a|} + \frac{2}{K}\right)\dot{E}^2 \tag{4.56}$$

$$B'o: \quad E=-\left(\frac{1}{2|a|}+\frac{2}{K}\right)\dot{E}^2 \qquad (4.57)$$

这里K为与误差衰减时间相联系的常数。K愈大，$A'o$愈接近Ao，即综合性能指标，偏重于衰减时间；反之，K愈小，$A'o$愈接近于横坐标轴，表示偏重于燃料消耗。可以看出，利用此种开关曲线控制，当误差衰减到零时，喷嘴仍会处于不断开关状态，是不利的。

3．有死区时，混合指标最优喷嘴控制规律

在上一段研究混合指标最优控制时，虽然其中一段当$|\Psi_2(t)|\leqslant 1$时，$u=0$，但当误差角趋于零时，此段亦渐趋于零，所形成的极限环只取决于控制周期的大小，喷嘴基本上处于“正”，“0”，“负”交替状态。在长时期的姿态控制过程中，喷嘴由于不断的开关，可能会损坏，且达不到节省燃料的目的。实际上，并不要求将误差角控制到零，允许有剩余误差$|E^*|$。为此可根据$|E^*|$建立一死区，而将四条抛物线分开，如图4.17所示，将Bo、$A'o$移至BD、$A'D$；将Ao、$B'o$移至

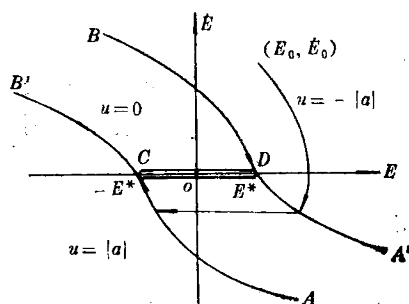


图 4.17 有死区的开关曲线示意图

AC、$B'C$。此时开关曲线方程如下：

$$BD:\quad E=E^*-\frac{\dot{E}^2}{2|a|} \tag{4.58}$$

$$A'D:\quad E=E^*+\left(\frac{1}{2|a|}+\frac{2}{K}\right)\dot{E}^2 \tag{4.59}$$

$$AC:\quad E=-E^*+\frac{\dot{E}^2}{2|a|} \tag{4.60}$$

$$BC':\quad E=-E^*-\left(\frac{1}{2|a|}+\frac{2}{K}\right)\dot{E}^2 \tag{4.61}$$

则此四条开关曲线，将相平面分成三部分。凡相点曲线落入BD、$A'D$曲线之右的，产生负力矩；凡相点落在$B'C$、AC曲线之左的，产生正力矩；凡相点落在四条抛物线之间的，关闭发动机。

例如，设起始条件$(E_0, \dot{E}_0)$使$\Psi_2 < -1$，则相点沿

$$E=E_0-\frac{\dot{E}^2-\dot{E}_0^2}{2|a|}$$

运动至与$A'D$曲线相遇，此时$\Psi_2=-1$，$u=0$；相点沿直线运动至与AC曲线相遇，此时$\Psi_2=1$，$u=|a|$；相点沿AC曲线至C点，由于控制周期影响，形成极限环，如图4.17所示。极限环的宽度取决于剩余角速度的大小。

为了保证能以最少喷嘴（一个喷嘴）形成极限环，在四条抛物线的基础上，增加两条抛物线，如图4.18所示。

在BD和AC之内增加两条抛物线，即

$$B''D:\quad E=E_1^*-\frac{\dot{E}^2}{2|a|} \tag{4.62}$$

$$A''C:\quad E=-E_1^*+\frac{\dot{E}^2}{2|a|} \tag{4.63}$$

且将两抛物线之间的区域用平行于E轴的直线分开为两个区域，即区域2和区域3．则此6条喷嘴控制开关曲线将相平面

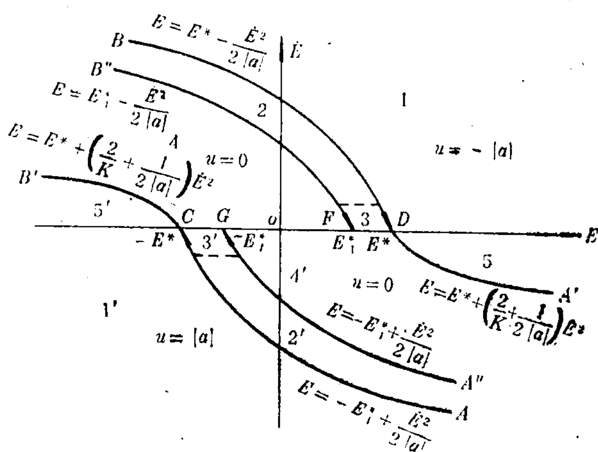


图 4.18 “阿波罗”开关曲线图

上半平面分为五个区域，下半平面相对应的也是五个区域，其工作状态如下表所示。

区 域	喷 嘴 工 作 状 态
1（1′）	喷嘴起动，力矩为负（正），至相点进入到指向抛物线止。
2（2′）	喷嘴起动，力矩为负（正），至误差消除为零止。
3（3′）	一个喷嘴工作。
4（4′）	喷嘴关闭，但在下述情况除外：当喷嘴已经起动了，使相点在区间$(-E_1^*, E_1^*)$过渡到E轴。
5（5′）	与区域1(1′)相似。

根据以上所述，可得计算结构方块图如下：

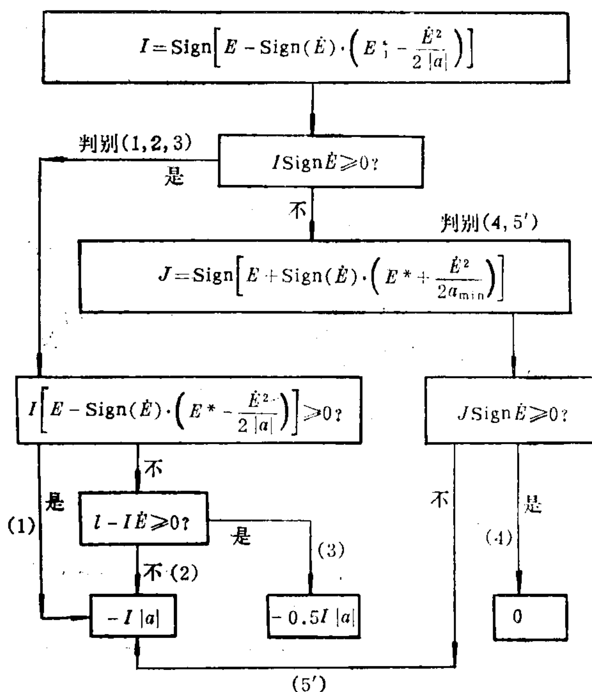


图 4.19 开关曲线计算流程图

图中

$$\frac{1}{2a_{\min}}=\frac{2}{K}+\frac{1}{2|a|} \tag{4.64}$$

二、干扰力矩不为零时，喷嘴控制规律的选择

当干扰力矩不为零时，飞行器姿态误差在相平面上的相点，总是在以下三个力矩之一所确定的抛物线的一段上。这三个力矩是：

(1) 干扰力矩与喷嘴正力矩之和 ($a_{干}+|a|$);

(2) 干扰力矩与喷嘴负力矩之和 ($a_{干}-|a|$);

(3) 只有干扰力矩 $a_{干}$.

设喷嘴控制开关曲线采用四条抛物线，如图4.17所示。研究在

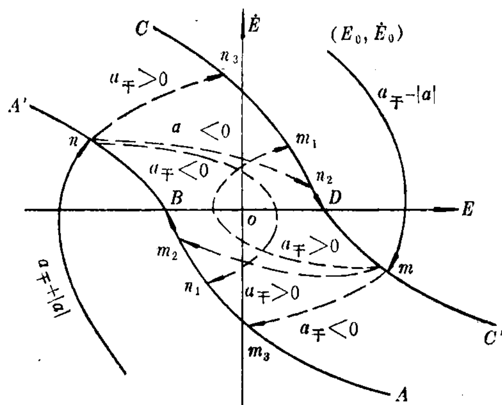


图 4.20 有干扰时的轨线变化情况示意

干扰力矩作用下的喷嘴开关曲线的选择。

设起始瞬间，相点在第一象限，则在$u=-|a|$的作用下，相点沿 $a_{干}-|a|$ 所确定的抛物线与开关曲线 $C'D$相交于m. 如图4.20所示，然后喷嘴关闭，相点沿由干扰加速度 $a_{干}$ 所确定的抛物线运动。

若 $a_{干}>0$，有两种可能：

(1) $|a_{干}|$ 较大，相点不与抛物线AB相交，而交抛物线CD于m_1. 然后沿 $a_{干}-|a|$ 所确定的抛物线运动。最后将绕D点运动，不能形成极限环。

(2) $|a_{干}|$ 较小，相点与抛物线 AB 交于 m_2，然后沿 $a_{干}+$

$|a|$ 所确定的抛物线运动，则可形成绕 B 、D 两点的极限环。

若 $a_{干}<0$，则与抛物线 AB 交于 m_3. 然后沿 $-|a_{干}|+|a|$ 所确定的抛物线运动，是否能形成极限环，取决于与抛物线 $A'B$ 相交后的情况。

起始点落在第三象限的情形，与上面叙述相似，可参看图4.20.

可以看出，如果起始条件 $(E_0, \dot{E}_0)$ 使 $\Psi_2=C_2-C_1t_0<-1$，则当 $a_{干}>0$时，只有在由 $a_{干}$所确定的抛物线

$$E=E_m+\frac{\dot{E}^2-\dot{E}_m^2}{2|a_{干}|}$$

与 AB 曲线相交时才会形成极限环。

同理，如果起始条件 $(E_0, \dot{E}_0)$ 使 $\Psi_2=C_2-C_1t_0>1$，则当 $a_{干}<0$时，只有在由 $a_{干}$所确定的抛物线

$$E=E_n-\frac{\dot{E}^2-\dot{E}_n^2}{2|a_{干}|}$$

与 CD 曲线相交时才会形成极限环。

为了能形成极限环，应选择有干扰加速度时的开关曲线，使在死区内，由干扰加速度 $a_{干}$ 所确定的抛物线，恰恰与另一边的开关曲线相切，以下对正负干扰加速度分别进行研究。

(1) $a_{干}>0$.

当干扰加速度为正时，所要求的开关曲线如图4.21所示，为了使由干扰加速度 $a_{干}$ 所确定的抛物线

$$E=-D_2+\frac{\dot{E}^2}{2|a_{干}|}$$

在 B 点与 AB 曲线相切，移动了 CD 曲线的截距，关键在于求

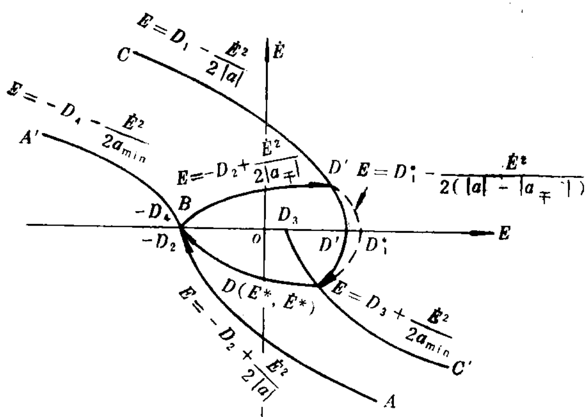


图 4.21　$a_{\mp}>0$时的开关曲线

截距 D_3.

研究$D(E^*, \dot{E}^*)$点，此点在 $C'D$、$D'D_1^*D$ 和 DBD' 三个抛物线上，故

$$\begin{cases} E^*=D_3+\dfrac{\dot{E}^{*2}}{2a_{\min}} \\ E^*=D_1^*-\dfrac{\dot{E}^{*2}}{2(|a|-|a_{\mp}|)} \\ E^*=-D_2+\dfrac{\dot{E}^{*2}}{2|a_{\mp}|} \end{cases} \tag{4.65}$$

消去E^*、$\dot{E}^*$，则得：

$$D_3=D_1^*-(D_1^*+D_2)\left[\frac{1}{|a|}+\left(1-\frac{|a_{\mp}|}{|a|}\right)\frac{1}{a_{\min}}\right]|a_{\mp}| \tag{4.66}$$

式中D_1^*为抛物线$D'D_1^*D$与E轴交点，而D_1为抛物线$D'D_1D$与E轴交点。因

$$\begin{cases} E^* = D_1 - \dfrac{\dot{E}^{*2}}{2|a|} \\ E^* = D_1^* - \dfrac{\dot{E}^{*2}}{2(|a| - |a_{干}|)} \end{cases} \tag{4.67}$$

消去E^*、$\dot{E}^*$，则得：

$$D_1^* = \frac{D_1 a^2 + D_2 a_{干}^2}{a - a_{干}^2} \tag{4.68}$$

(2) $a_{干}<0$.

当干扰加速度为负时，所要求的开关曲线如图4.22所示。

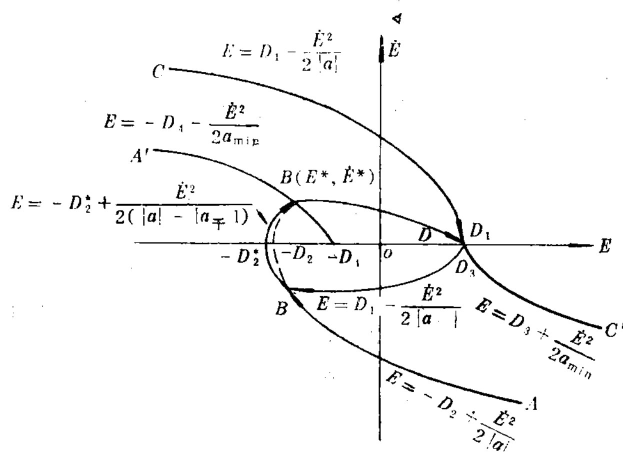


图 4.22 $a_{干}<0$时的开关曲线

为了使由干扰加速度$a_{干}$所确定的抛物线

$$E = D_1 - \frac{\dot{E}^2}{2|a_{干}|}$$

在D点与CD曲线相切，移动了$A'B$曲线的截距，关键在于求截距D_4。

研究$B(E^*, \dot{E}^*)$点，此点在$A'B$、BD_2^*B'和BDB'三个抛物线上。

$$\begin{cases} E^* = -D_4 - \dfrac{\dot{E}^2}{2a_{\min}} \\ E^* = D_1 - \dfrac{\dot{E}^{*2}}{2|a_\mp|} \\ E^* = -D_2^* + \dfrac{\dot{E}^{*2}}{2(|a| - |a_\mp|)} \end{cases} \tag{4.69}$$

消去E^*、$\dot{E}^*$，则得：

$$D_4 = D_2^* - (D_2^* + D_1)\left[\frac{1}{|a|} + \left(1 - \frac{|a_\mp|}{|a|}\right)\frac{1}{a_{\min}}\right]|a_\mp| \tag{4.70}$$

而

$$D_2^* = \frac{D_2 a^2 + D_1 a_\mp^2}{a^2 - a_\mp^2} \tag{4.71}$$

由以上叙述可知，干扰加速度的符号不同，则改变不同的开关曲线的截距来满足相切条件。由于在整个飞行过程中，干扰加速度是变化的，因此，根据(4.66)和(4.70)式所确定的D_3、D_4也是变化的。这样就使开关曲线变得复杂化了。但考虑到干扰加速度所确定的抛物线与开关曲线相切的条件，并不是绝对必要的。我们感兴趣的是能保证有一适当的极限环。为此，对干扰力矩作用下的开关曲线选择如下。

以“阿波罗”为例，首先选择一参考角加速度$a_{\min}$($a_{\min}=$1.4度/秒^2)，则可以有五种情况。

(1) $a_\mp \geqslant a_{\min}$

如图4.23，选择$D_1 = D$，$-D_2 = -D_4 = -2D$，$D_3 =$

$-0.75D$. 则形成极限环，如图4.23上的虚线所示。

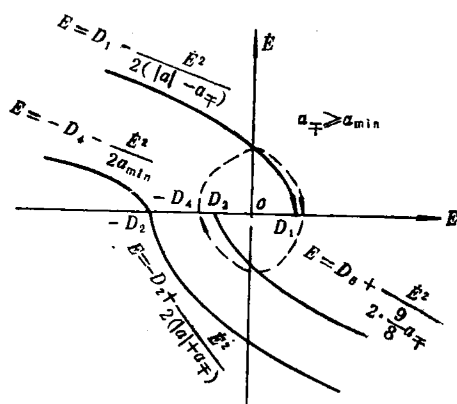


图 4.23 $a_{干}\geq a_{min}$时开关曲线

(2) $a_{min}>a_{干}\geq 0.5a_{min}$

如图4.24所示，选择

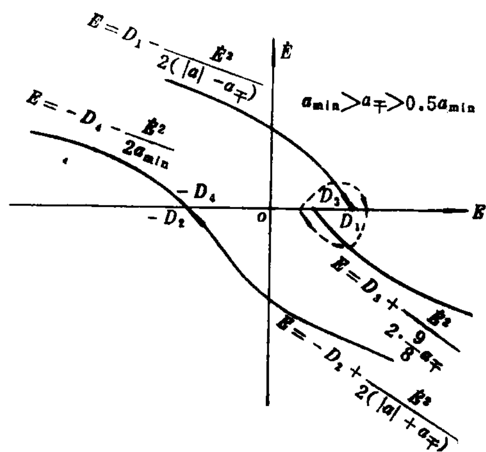


图 4.24 $a_{min}>a_{干}\geq 0.5a_{min}$时开关曲线

$$D_1 = D$$
$$-D_2 = -D_4 = -D$$
$$D_3 = 0.5D$$

则形成的极限环如图4.24上虚线所示。

(3) $0.5a_{min} > a_{干} \geqslant -0.5a_{min}$

如图4.25所示，选择

$$D_1 = D_3 = D$$
$$-D_2 = -D_4 = -D$$

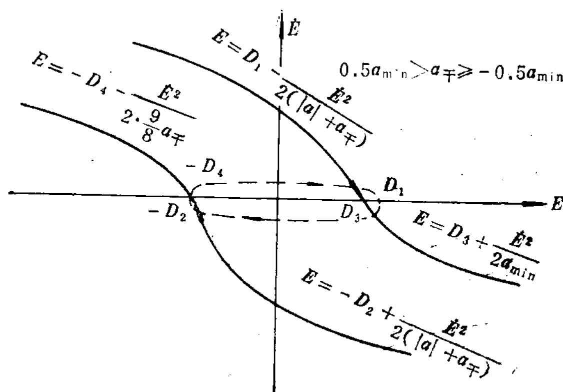


图 4.25　$0.5a_{min} > a_{干} \geqslant -0.5a_{min}$时开关曲线

则形成极限环如图4.25上虚线所示。

(4) $-0.5a_{min} > a_{干} \geqslant -a_{min}$

如图4.26所示，选择

$$D_1 = D_3 = D$$
$$-D_2 = -D$$
$$-D_4 = -0.5D$$

则形成极限环如图4.26上虚线所示。

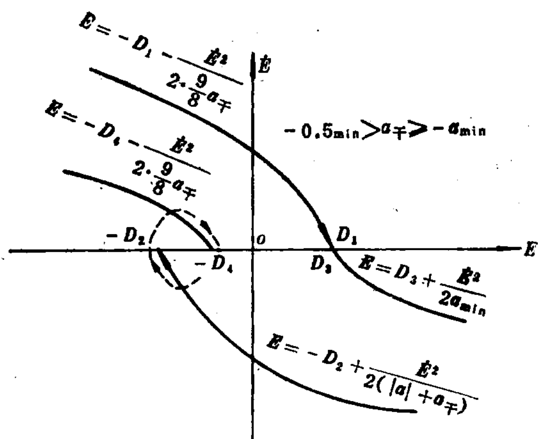


图 4.26 $-0.5a_{min}>a_干\geqslant-a_{min}$时开关曲线

(5) $-a_{min}\geqslant a_干$

如图4.27所示，选择

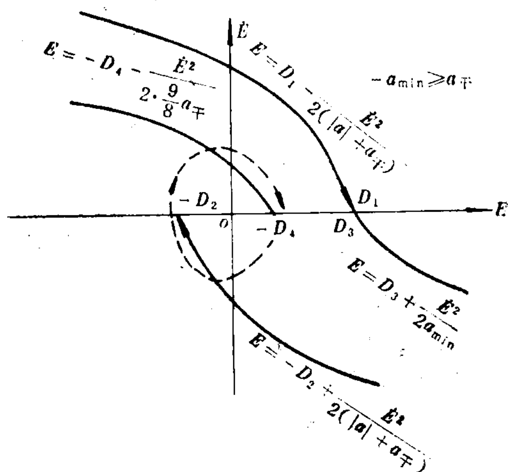


图 4.27 $-a_{min}\geqslant a_干$时开关曲线

$$D_1=D_3=2D$$
$$-D_2=-D$$
$$-D_4=0.75D$$

则形成极限环如图4.27上虚线所示。

以上五种情况，可以用以下计算方块图表示。

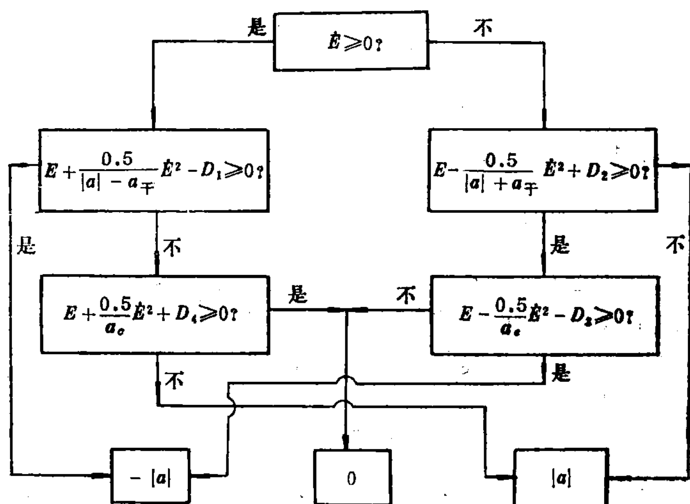


图 4.28　存在$a_干$时开关曲线计算流程图

式中

(1) 当$a_干\geqslant a_{min}$时，$D_1=D$，$-D_2=-D_4=-2D$，$D_3=-0.75D$，$a_c=a_{min}$，$a_e=\frac{9}{8}a_干$.

(2) 当 $a_{min}>a_干\geqslant0.5a_{min}$ 时，$D_1=D_2=D_4=D$，$D_3=0.5D$，$a_c=a_{min}$，$a_e=\frac{9}{8}a_干$.

(3) 当$0.5a_{min}>a_干\geqslant-0.5a_{min}$ 时，$D_1=D_3=D_4=D_2=$

D，$a_c = a_e = a_{\min}$.

（4）当 $-0.5a_{\min} > a_{\mp} \geq -a_{\min}$ 时，$D_1 = D_3 = D_2 = D$，$D_4 = 0.5D$，$a_c = \frac{9}{8}a_{\mp}$，$a_e = a_{\min}$.

（5）当 $-a_{\min} \geq a_{\mp}$ 时，$D_1 = D_3 = 2D$，$D_2 = D$，$-D_4 = 0.75D$，$a_c = \frac{9}{8}a_{\mp}$，$a_e = a_{\min}$.

§4 四元数作为误差信号时，喷嘴控制规律的确定

以上研究了欧拉角作为误差信号时，喷嘴的开关控制规律。在用欧拉角作误差信号时，利用了近似关系式(4.21)，如果用四元数分量作为误差信号，则需利用四元数方程

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} * \lambda \tag{4.72}$$

式中 λ 为体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 与需要坐标系 $ox^*y^*z^*$ 之间的四元数，而 $\boldsymbol{\Omega}$ 为相对角速度

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^* \tag{4.73}$$

如果设需要坐标系旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}^*$ 为常值矢量，则

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{a} \tag{4.74}$$

这里 $\boldsymbol{a}$ 为角加速度。

微分(4.72)式，得

$$\ddot{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{\Omega} * \boldsymbol{\Omega}}{2}\right)\lambda \tag{4.75}$$

即

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}_0 = -\dfrac{\Omega^2}{4}\lambda_0 - \dfrac{a_{x_1}}{2}\lambda_1 - \dfrac{a_{y_1}}{2}\lambda_2 - \dfrac{a_{z_1}}{2}\lambda_3 \\ \ddot{\lambda}_1 = \dfrac{a_{x_1}}{2}\lambda_0 - \dfrac{\Omega^2}{4}\lambda_1 - \left(\dfrac{a_{z_1}}{2}\lambda_2 - \dfrac{a_{y_1}}{2}\lambda_3\right) \\ \ddot{\lambda}_2 = \dfrac{a_{y_1}}{2}\lambda_0 - \dfrac{\Omega^2}{4}\lambda_2 - \left(\dfrac{a_{x_1}}{2}\lambda_3 - \dfrac{a_{z_1}}{2}\lambda_1\right) \\ \ddot{\lambda}_3 = \dfrac{a_{z_1}}{2}\lambda_0 - \dfrac{\Omega^2}{4}\lambda_3 - \left(\dfrac{a_{y_1}}{2}\lambda_1 - \dfrac{a_{x_1}}{2}\lambda_2\right) \end{cases} \tag{4.76}$$

当喷嘴不工作时，$a_{x_1} = a_{y_1} = a_{z_1} = 0$

$$\dot{\lambda}_i^2 + \frac{\Omega^2}{4}\lambda_i^2 = \dot{\lambda}_{i0}^2 + \frac{\Omega^2}{4}\lambda_{i0}^2 = C_{i_0} \quad (i=1,2,3) \tag{4.77}$$

这表示在（λ_i，$\dot{\lambda}_i$）相平面内的一个椭圆，其中心在原点(0，0)，半长轴为$\dfrac{2}{\Omega}\sqrt{C_{i_0}}$，半短轴为$\sqrt{C_{i_0}}$。

如果$a_{x_1} = a$，$a_{y_1} = a_{z_1} = 0$，且近似认为λ_0与λ_1无关，则

$$\dot{\lambda}_1^2 = \dot{\lambda}_{10}^2 + a\lambda_0(\lambda_1 - \lambda_{10}) - \frac{\Omega^2}{4}(\lambda_1^2 - \lambda_{10}^2) \tag{4.78}$$

即

$$\dot{\lambda}_1^2 + \frac{\Omega^2}{4}\left(\lambda_1 - \frac{2a\lambda_0}{\Omega^2}\right)^2 = \dot{\lambda}_{10}^2 - a\lambda_0\lambda_{10} + \frac{\Omega^2}{4}\lambda_{10}^2 + \frac{a^2\lambda_0^2}{\Omega^2} = A_1^2 \tag{4.79}$$

在相平面(λ_1，$\dot{\lambda}_2$)上，亦为椭圆，其中心在$\left(\dfrac{2a\lambda_0}{\Omega^2}, 0\right)$，半长轴为$\dfrac{2A_1}{\Omega}$，半短轴为$A_1$。

同理，如果$a_{y_1}=a$，$a_{x_1}=a_{z_1}=0$，则

$$\lambda_2^2+\frac{\Omega^2}{4}\left(\lambda_2-\frac{2a\lambda_0}{\Omega^2}\right)^2=A_2^2 \tag{4.80}$$

如果$a_{z_1}=a$，$a_{x_1}=a_{y_1}=0$，则

$$\lambda_3^2+\frac{\Omega^2}{4}\left(\lambda_3-\frac{2a\lambda_0}{\Omega^2}\right)^2=A_3^2 \tag{4.81}$$

将以上结果与（4.23）和（4.24）式比较可以看出，当喷嘴不工作时，用欧拉角作为误差信号，在相平面（E，$\dot{E}$）上，相点沿直线运动；而用四元数分量作为误差信号，在相平面（λ_i，$\dot{\lambda}_i$）上，相点沿中心在原点的狭长椭圆运动。

当喷嘴工作时（认为三通道独立），用欧拉角作为误差信号，在相平面（E，$\dot{E}$）上，相点沿抛物线运动；而用四元数分量作为误差信号，在相平面（λ_i，$\dot{\lambda}_i$）上，相点沿中心在（$2a\lambda_0/\Omega^2$，0）的椭圆运动。当$a>0$时，此椭圆中心右移；$a<0$时，椭圆中心左移，如图4.29所示。

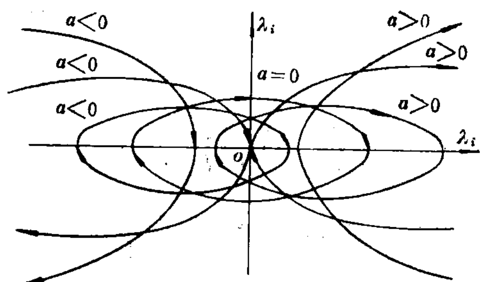


图 4.29 用四元数表示的相轨迹

下面以（λ_3，$\dot{\lambda}_3$）相平面为例，来研究最优控制规律。此时，状态方程为

$$\begin{cases}\dfrac{d\lambda_3}{dt}=\lambda_3\\ \dfrac{d\lambda_3}{dt}=-\dfrac{\Omega^2}{4}\lambda_3+\dfrac{\lambda_0}{2}u\end{cases} \tag{4.82}$$

这里控制变量的取值范围为$u=-|a|$，0，$|a|$

共轭方程为

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi_1}{dt}=\dfrac{\Omega^2}{4}\psi_2\\ \dfrac{d\psi_2}{dt}=-\psi_1\end{cases} \tag{4.83}$$

即

$$\begin{cases}\psi_1(t)=\dfrac{\Omega}{2}A\sin\left(\dfrac{\Omega}{2}t+B\right)\\ \psi_2(t)=A\cos\left(\dfrac{\Omega}{2}t+B\right)\end{cases} \tag{4.84}$$

这里任意常数A、B由共轭变量起始条件来确定。

$$\begin{cases}A^2=\psi_{20}^2+\dfrac{4\psi_{10}^2}{\Omega^2}\\ B=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\psi_{10}}{\Omega\psi_{20}}\right)\end{cases} \tag{4.85}$$

如果选择性能指标为

$$J_{\min}=\int_{t_0}^{T}(K+|U|)dt \tag{4.86}$$

利用庞特里亚金极小原理，则哈密顿函数为

$$H=K+|U|+\psi_1\lambda_3-\frac{\Omega^2}{4}\psi_2\lambda_3+\frac{\lambda_0}{2}\psi_2 u \tag{4.87}$$

则最优控制

$$U^*=\begin{cases} -|a| & \text{当 } \frac{\lambda_0}{2}\psi_2>1\text{时} \\ 0 & \text{当} \left|\frac{\lambda_0}{2}\psi_2\right|\leqslant 1\text{时} \\ |a| & \text{当 } \frac{\lambda_0}{2}\psi_2<-1\text{时} \end{cases} \tag{4.88}$$

由(4.84)式知 $\psi_2(t)$ 为余弦函数，故需研究在控制过程中会发生几次变号。由(4.88)式可知，当

$$\frac{\lambda_0}{2}\psi_2=\pm 1$$

时，U^* 变号，即

$$\frac{\lambda_0}{2}\sqrt{\psi_{20}^2+\frac{4\psi_{10}^2}{\Omega^2}}\cos\left[\frac{\Omega}{2}t+\operatorname{arctg}\left(\frac{2\psi_{10}}{\Omega\psi_{20}}\right)\right]=\pm 1$$

$$t=\frac{2}{\Omega}\left\{\arccos\left[\pm\frac{2}{\lambda_0}\left(\psi_{20}^2+\frac{4\psi_{10}^2}{\Omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]-\operatorname{arctg}\left(\frac{2\psi_{10}}{\Omega\psi_{20}}\right)\right\} \tag{4.89}$$

例 设 $\Omega=2.8943\times 10^{-3}$ rad/s，$\lambda_0=0.997912128$，$\psi_{10}=2.8\times 10^{-3}$，$\psi_{20}=2.5$.

则当 $\frac{\lambda_0}{2}\psi_2=1$ 时，$\psi_2=\frac{2}{\lambda_0}=2.004184481$

$$t_1=\frac{2}{\Omega}(0.884105155-0.658644345)\text{s}=155.7964344\text{s}$$

当 $\frac{\lambda_0}{2}\psi_2=-1$ 时，$\psi_2=-2.004184481$

$$t_2=\frac{2}{\Omega}(2.257487499-0.658644345)\text{s}=1104.821998\text{s}$$

其周期为$\frac{4\pi}{\Omega}=4341.76506\text{s}$。

由上例可以看出，由于周期较长，往往只出现(- ,0, +)或(+ ,0, -)的控制情况。

设起始瞬间$\psi_{20}>\frac{2}{\lambda_0}$，由(4.88)式，此时$u^*=-|a|$，如图4.30所示，相点（$\lambda_3$，$\lambda_3$）将沿由方程

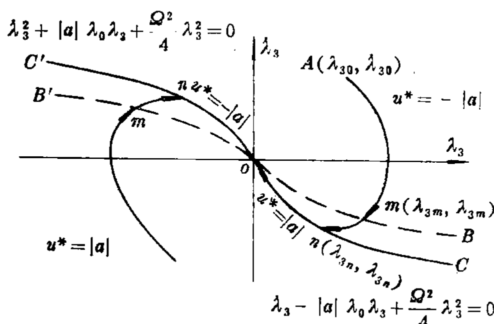


图 4.30 用四元数表示的最优开关曲线

$$
\begin{aligned}
&\lambda_3^2+|a|\lambda_0\lambda_3+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_3^2\\
&=\lambda_{30}^2+|a|\lambda_0\lambda_{30}+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{30}^2
\end{aligned}
\tag{4.90}
$$

所确定的轨线运动至$m(\lambda_{3m}$，$\lambda_{3m})$点，此时$\psi_{2m}=\frac{2}{\lambda_0}$，转为$u^*=0$，而$m$点的$\lambda_{3m}$，$\lambda_{3m}$由下式确定。

$$
\begin{cases}
\lambda_{3m}^2+|a|\lambda_0\lambda_{3m}+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3m}^2=\lambda_{30}^2+|a|\lambda_0\lambda_{30}+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{30}^2\\
K+\psi_{1m}\lambda_{3m}-\frac{\Omega^2}{4}\psi_{2m}\lambda_{3m}=0
\end{cases}
\tag{4.91}
$$

以后相点沿$u^*=0$轨线移动至$n(\lambda_{3n},\ \dot{\lambda}_{3n})$点，其方程为

$$\dot{\lambda}_{3n}^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3n}^2=\dot{\lambda}_{3m}^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3m}^2 \tag{4.92}$$

至n点，$\psi_{2n}=-\frac{2}{\lambda_0}$，$u^*=|a|$，此时$\lambda_{3n}$，$\dot{\lambda}_{3n}$由下式确定。

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_{3n}^2-|a|\lambda_0\lambda_{3n}+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3n}^2=0\\ K+\psi_{1n}\dot{\lambda}_{3n}-\frac{\Omega^2}{4}\psi_{2n}\lambda_{3n}=0\end{cases} \tag{4.93}$$

由(4.92)式和(4.93)第一式

$$\begin{cases}\lambda_{3n}=\frac{1}{|a|\lambda_0}\left(\dot{\lambda}_{3m}^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3m}^2\right)\\ \dot{\lambda}_{3n}=\left[\dot{\lambda}_{3m}^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3m}^2-\frac{\Omega^2}{4a^2\lambda_0}\left(\dot{\lambda}_{3m}^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3m}^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\end{cases} \tag{4.94}$$

由(4.91)式第二式和(4.93)式第二式

$$\begin{cases}\psi_{1m}=\frac{1}{\dot{\lambda}_{3m}}\left(K-\frac{\Omega^2}{4}\psi_{2m}\lambda_{3m}\right)\\ \psi_{1n}=\frac{1}{\dot{\lambda}_{3n}}\left(K-\frac{\Omega^2}{4}\psi_{2n}\lambda_{3n}\right)\end{cases} \tag{4.95}$$

如图4.30所示，此时，$\psi_{2m}=\frac{2}{\lambda_0}$，$\psi_{2n}=-\frac{2}{\lambda_0}$，故

$$\begin{cases}\psi_{1m}=\frac{1}{\dot{\lambda}_{3m}}\left(K-\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_{3m}\right)\\ \psi_{1n}=\frac{1}{\dot{\lambda}_{3n}}\left(K+\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_{3n}\right)\end{cases} \tag{4.96}$$

因

$$\psi_{1n}=-\frac{\Omega}{2}\sqrt{A^2-\psi_{2n}^2}=-\frac{\Omega}{2}\sqrt{A^2-\psi_{2m}^2}=\psi_{1m}$$

(4.97)

故
$$\left(K-\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_{3m}\right)\lambda_{3n}=\left(K+\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_{3n}\right)\lambda_{3m} \qquad (4.98)$$

将(4.94)式代入上式，则得 Bo 的曲线方程，它是喷嘴闭线。

$$\left(\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_{3m}-K\right)\left[\lambda_{3m}^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3m}^2-\frac{\Omega^2}{4a^2\lambda_0^2}\cdot\left(\lambda_{3m}^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3m}^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{\Omega^2}{2|a|\lambda_0^2}\left(\lambda_{3m}^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3m}^2\right)\lambda_{3m}+K\lambda_{3m}=0 \qquad (4.99)$$

同理，对于$B'o$曲线，此时$\psi_2=-2/\lambda_0$，$\psi_{2n}=2/\lambda_0$，则

$$\psi_{1m}=\frac{1}{\lambda_{3m}}\left(K+\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_{3m}\right) \qquad (4.100)$$

$$\psi_{1n}=\frac{1}{\lambda_{3n}}\left(K-\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_{3n}\right) \qquad (4.101)$$

故

$$\left(K+\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_{3m}\right)\lambda_{3n}=\left(K-\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_{3n}\right)\lambda_{3m} \qquad (4.102)$$

$$\left(\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_{3m}+K\right)\left[\lambda_{3m}^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3m}^2-\frac{\Omega^2}{4a^2\lambda_0^2}\cdot\left(\lambda_{3m}^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3m}^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{\Omega^2}{2|a|\lambda_0^2}\left(\lambda_{3m}^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3m}^2\right)\lambda_{3m}-K\lambda_{3m}=0 \qquad (4.103)$$

则开关曲线由Co、$C'o$、Bo、$B'o$四条曲线组成。因为K是时间因素，K愈小，Co曲线愈靠近横轴$o\lambda_3$。由图 4.30可以看出，无论在任何起始条件下，由此开关曲线所确定的控制角加速度，最多只变号一次，即可趋于零点。但当误差很小时，在零点附近，由于控制周期、误差或干扰原因，喷嘴可能会出现连续开关状态，这是很不利的。实际上，并不要求将λ_3、$\dot{\lambda}_3$都控制到零，可以容许存在小的剩余误差。为此引入死区D_1D_2，将四条开关曲线分开如图4.31所示。

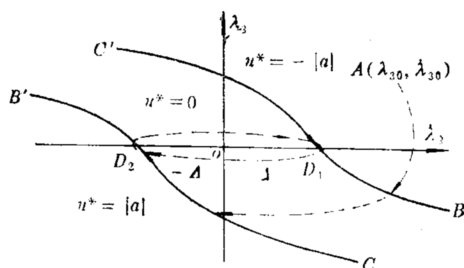


图 4.31　考虑死区时的开关曲线

图中Δ为允许误差，四条开关曲线的方程如下：

$$C'D_1:\quad \dot{\lambda}_3^2 + |a|\,\lambda_0\lambda_3 + \frac{\Omega^2}{4}\lambda_3^2 = |a|\,\lambda_0\Delta + \frac{\Omega^2}{4}\Delta^2 \tag{4.104}$$

$$CD_2:\quad \dot{\lambda}_3^2 - |a|\,\lambda_0\lambda_3 + \frac{\Omega^2}{4}\lambda_3^2 = |a|\,\lambda_0\Delta + \frac{\Omega^2}{4}\Delta^2 \tag{4.105}$$

$$BD_1:\quad \left(\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_3 - K\right)\left\{\left(\dot{\lambda}_3^2 + \frac{\Omega^2}{4}\lambda_3^2\right) - \frac{\Omega^2}{4}\left[\frac{1}{|a|\,\lambda_0}\left(\dot{\lambda}_3^2 + \frac{\Omega^2}{4}\lambda_3^2\right) - \Delta - \frac{\Omega^2}{4|a|\,\lambda_0}\Delta^2\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\left[\frac{1}{|a|\lambda_0}\left(\lambda_3^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_3^2\right)+\Delta-\frac{\Omega^2}{4|a|\lambda_0}\Delta^2\right]\lambda_3$$
$$+K\lambda_3=0 \tag{4.106}$$

$$B'D_2:\quad \left(\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\lambda_3+K\right)\left\{\left(\lambda_3^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_3^2\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\Omega^2}{4}\left[\frac{1}{|a|\lambda_0}\left(\lambda_3^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_3^2\right)+\Delta-\frac{\Omega^2}{4|a|\lambda_0}\Delta^2\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\left[\frac{1}{|a|\lambda_0}\left(\lambda_3^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_3^2\right)+\Delta-\frac{\Omega^2}{4|a|\lambda_0}\Delta^2\right]\lambda_3$$
$$-K\lambda_3=0 \tag{4.107}$$

可以看出，开关曲线BD_1和$B'D_2$为高阶曲线，在飞行器上不易实现。为此需进一步简化。

如果令

$$\begin{cases} X=\lambda_3^2+\dfrac{\Omega^2}{4}\lambda_3^2+|a|\lambda_0\Delta_1 \\ \Delta_1=\Delta-\dfrac{\Omega^2}{4|a|\lambda_0}\Delta^2 \end{cases} \tag{4.108}$$

则BD_1可写成

$$\lambda_3=\frac{2\lambda_0}{\Omega^2}\left[K-\frac{\left(\dfrac{\Omega^2}{2|a|\lambda_0^2}X+K\right)\lambda_3}{\left(X-|a|\lambda_0\Delta_1-\dfrac{\Omega^2}{4|a|\lambda_0}X^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$
$$=f(\lambda_3,X) \tag{4.109}$$

这是超越方程。由于X的表达式中$\frac{\Omega^2}{4}\lambda_3^2$项很小，则可用逐次逼近法解超越方程。

一次近似，可令

$$X_1=\lambda_3^2+|a|\lambda_0\Delta_1 \tag{4.110}$$

则
$$\lambda_{3_1}=\frac{2\lambda_0}{\Omega^2}\left\{K-\frac{\left(\frac{\Omega^2}{2|a|\lambda_0^2}\lambda_3^2+\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\Delta_1+K\right)\lambda_3}{\left[\lambda_3^2-\frac{\Omega^2}{4|a|\lambda_0}(\lambda_3^2+|a|\lambda_0\Delta_1)^2\right]}\right\}$$

$$=f(\lambda_3,\ X_1) \tag{4.111}$$

二次近似，可令

$$X_2=\lambda_3^2+\frac{\Omega^2}{4}\lambda_{3_1}^2+|a|\lambda_0\Delta_1$$

则
$$\lambda_{3_2}=f(\lambda_3,\ X_2)$$

如此反复迭代，直至$|\lambda_{3_{i+1}}-\lambda_{3_i}|\leqslant\varepsilon$时止。

这样确定BD_1曲线，计算很复杂，不便于在飞行器上应用，实际上，作为控制开关曲线，并不要求准确地按(4.106)式来进行控制。为了易于实现，可对控制开关曲线进行简化，例如用一次近似方程(4.110)代替(4.109)式。此时

$$BD_1:\quad \lambda_3=\frac{2\lambda_0}{\Omega^2}\left\{K-\frac{\left(\frac{\Omega^2}{2|a|\lambda_0^2}\lambda_3^2+\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\Delta_1+K\right)\lambda_3}{\left[\lambda_3^2-\frac{\Omega^2}{4|a|\lambda_0}(\lambda_3^2+|a|\lambda_0\Delta_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\} \tag{4.112}$$

$$B'D_2:\ \lambda_3=-\frac{2\lambda_0}{\Omega^2}\left\{K-\frac{\left(\frac{\Omega^2}{2|a|\lambda_0^2}\lambda_3^2+\frac{\Omega^2}{2\lambda_0}\Delta_1-K\right)\lambda_3}{\left[\lambda_3^2-\frac{\Omega^2}{4|a|\lambda_0}(\lambda_3^2+|a|\lambda_0\Delta_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\} \tag{4.113}$$

利用(4.112)和(4.113)式作为开关曲线有以下缺点。

(1) 必须保证

$$\lambda_3^2-\frac{\Omega^2}{4|a|\lambda_0}(\lambda_3^2+|a|\lambda_0\Delta_1)^2>0 \tag{4.114}$$

(2) 此曲线不经过D_1和D_2点。

例 设 $\Omega=2.8943\times10^{-3}$rad/s， $\lambda_0=0.997912128$，

$|a|=0.01$rad/s^2，$\Delta=0.017453293$rad

对(4.113)式计算结果

当$K=1$时，$\lambda_3=0.01318$，$\lambda_3=-0.017451905$

$\lambda_3=0.0076075$，$\lambda_3=0$

$K=0.1$时 $\lambda_3=0.00572$，$\lambda_3=-0.001746072$

$\lambda_3=0.00211095$，$\lambda_3=0$

$K=0.01$时 $\lambda_3=0.003$，$\lambda_3=-0.017423196$

$\lambda_3=0.00066$；$\lambda_3=-0.000000024$

$K=0.001$时 $\lambda_3=0.001678$，$\lambda_3=-0.017457361$

$\lambda_3=0.0002084795$，$\lambda_3=0$

$K=0$时 $\lambda_3=0.0001$，$\lambda_3=-0.017459854$

可以看出，由于(4.114)式的限制，λ_3不能为零。为了避免此缺点，进一步简化，略去(4.112)和(4.113)式中的$\frac{\Omega^2}{4|a|\lambda_0}(\lambda_3^2+|a|\lambda_0\Delta_1)$，则

$$BD_1: \qquad \lambda_3=\frac{1}{|a|\lambda_0}\lambda_3^2+\Delta \tag{4.115}$$

$$B'D_2: \qquad \lambda_3=-\frac{1}{|a|\lambda_0}\lambda_3^2-\Delta \tag{4.116}$$

为两条抛物线，与K无关。如果利用(4.115)和(4.116)式作为关线，已不能满足性能指标(4.86)式，故是次最优的，此时，喷嘴控制开关曲线如图4.32所示。其计算结构图如图4.33所示。

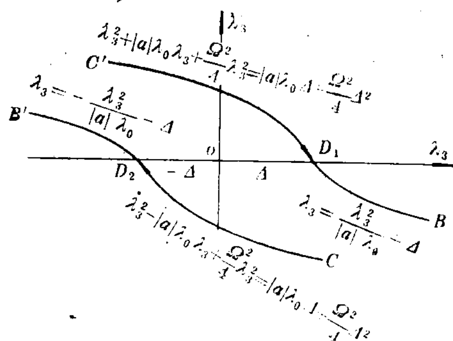


图 4.32 简化的开关曲线

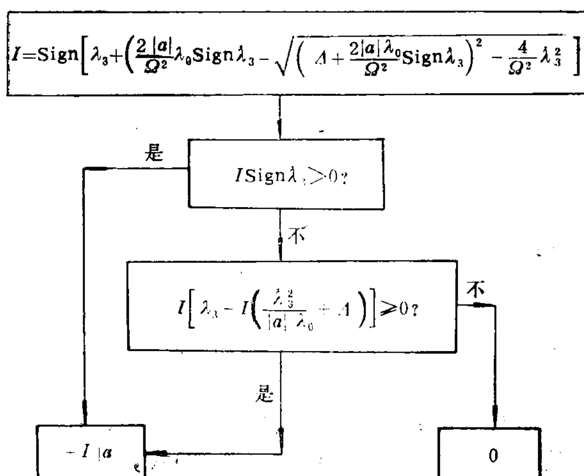


图 4.33 开关曲线计算流程图

利用以上计算结构图，应保证：

$$\lambda_3^2 \leqslant \frac{\Omega^2}{4}\left(\frac{2|a|\lambda_0}{\Omega^2}+\Delta\right)^2$$

此点是不难满足的，如用前例数据，则要求

$$|\lambda_3| < 3.447878375\text{rad/s}$$

以上研究的结果都是对于干扰力矩为零的情况。如果存在干扰力矩，则可以参照上一节的结果，类似地得出在干扰力矩不为零的情况下的喷嘴控制开关曲线。

§5 四元数作为误差信号时，喷嘴控制的最佳控制轴法

上一节在三通道互相独立假设下，导出了相平面$(\lambda_i, \dot{\lambda}_i)$上的喷嘴开关曲线。由本章第二节论述了在大姿态情况下，三通道实际上是交联的。由于交联的影响，将影响姿态误差的衰减过程，甚至会影响到控制的稳定性，为了加速误差收敛过程，必须设法消除或减少交联影响。但由刚体动力学的最优控制问题的研究可以看出：用外力矩作为控制函数，由于附加了刚体动力学方程，使方程组变为非线性变系数微分方程组，不能得出解析形式的最优控制表达式；需要进行大量的数值计算，给实现最佳控制带来很大的困难。

考虑到航天飞行器往往采用如图4.1和4.2所示的喷嘴系统来产生控制力矩，如果近似认为

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{x_1} = \dfrac{M_{x_1}}{I_{x_1}} = a_{x_1} \\ \dot{\omega}_{y_1} = \dfrac{M_{y_1}}{I_{y_1}} = a_{y_1} \\ \dot{\omega}_{z_1} = \dfrac{M_{z_1}}{I_{z_1}} = a_{z_1} \end{cases} \tag{4.117}$$

为常数。则动力学最优控制与运动学最优控制一致。第三章第六节已经证明可选择

$$\Omega_i = -K_i\lambda_0\lambda_i \quad (4.118)$$

作为姿态控制信息。如果需要坐标系 $ox^*y^*z^*$ 的绝对角速度为 $\boldsymbol{\omega}^*=(\omega^*_{x_1},\ \omega^*_{y_1},\ \omega^*_{z_1})$，则应使

$$\begin{cases}\Omega_1=\omega_{x_1}-\omega^*_{x_1}=-K_1\lambda_0\lambda_1\\ \Omega_2=\omega_{y_1}-\omega^*_{y_1}=-K_2\lambda_0\lambda_2\\ \Omega_3=\omega_{z_1}-\omega^*_{z_1}=-K_3\lambda_0\lambda_3\end{cases} \quad (4.119)$$

而体坐标系绝对角速度 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_{x_1},\ \omega_{y_1},\ \omega_{z_1})$ 由作用在飞行器上的控制力矩来确定，则

$$\begin{cases}\omega_{x_1}=a_{x_1}t+\omega_{x10}\\ \omega_{y_1}=a_{y_1}t+\omega_{y10}\\ \omega_{z_1}=a_{z_1}t+\omega_{z10}\end{cases}$$

这就是说，在姿态控制过程中，要求飞行器在空间的旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向在由四元数 λ 所确定的欧拉轴和 $\boldsymbol{\omega}^*$ 的合成方向上。

以“阿波罗”喷嘴系统为例来研究喷嘴系统的最佳控制。参看图4.2，可以看出启动喷嘴的个数，可能有三种情况，即4个喷嘴工作；2个喷嘴工作和1个喷嘴工作。由于每一个喷嘴工作时所产生的推力都是相等的，分别用 a_{x_1}、a_{y_1}、a_{z_1}、a_u、a_v 表示两个喷嘴工作时沿各相应轴所产生的角加速度，则可列表如下表。可以看出，对于 ox_1 轴可以产生7种角加速度；而对于 oy_1、oz_1、ou、ov 轴则只能产生5种角加速度，故无论是采用 ox_1、oy_1、oz_1 轴还是采用 op、ou、ov 轴都只能产生 $7\times5\times5=175$ 个方向。

把由于某一种控制而产生的飞行器在空间转动的总角速度方向称为控制轴。对 x_1、y_1、z_1 轴来说，有175个方向，即是有175个控制轴，也即是只能实现175个方向的控制，故所能实现

角加速度 方向 \ 喷嘴数	4	2	1	0	1	2	4
ox_1轴(op轴)	$2a_{x_1}$	a_{x_1}	$\frac{1}{2}a_{x_1}$	0	$-\frac{1}{2}a_{x_1}$	$-a_{x_1}$	$-2a_{x_1}$
oy_1轴	$2a_{y_1}$	a_{y_1}	/	0	/	$-a_{y_1}$	$-2a_{y_1}$
oz_1轴	$2a_{z_1}$	a_{z_1}	/	0	/	$-a_{z_1}$	$-2a_{z_1}$
ou轴	/	a_u	$\frac{1}{2}a_u$	0	$-\frac{1}{2}a_u$	$-a_u$	/
ov轴	/	a_v	$\frac{1}{2}a_v$	0	$-\frac{1}{2}a_v$	$-a_v$	/

的控制方向是有限的。

如果以la_{x_1}表示在ox_1轴方向的控制角加速度，则$l=\pm 2$，± 1，$\pm\frac{1}{2}$，0；ma_{y_1}、na_{z_1}分别表示在oy_1、oz_1轴方向的控制角加速度，则$m,n=\pm 2$，± 1，0．在K瞬间的控制轴如图4.34所示。用$E_{控x}$、$E_{控y}$、$E_{控z}$分别表示控制轴$E_{控}$在体坐标系$ox_1y_1z_1$上的三个分量，则

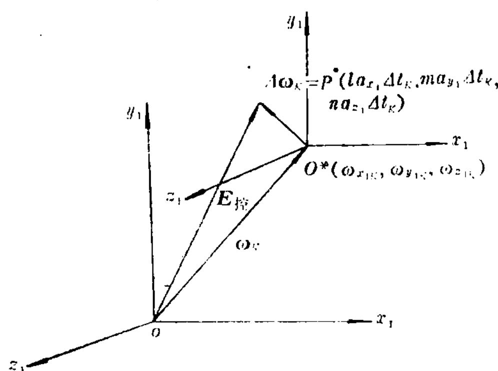


图 4.34　控制轴$E_{控}$示意图

$$\begin{cases} E_{控x}=\omega_{x_{1K}}+la_{x_1}\Delta t_K=\alpha_K \\ E_{控y}=\omega_{y_{1K}}+ma_{y_1}\Delta t_K=\beta_K \\ E_{控z}=\omega_{z_{1K}}+na_{z_1}\Delta t_K=\gamma_K \end{cases}$$

如果用$\boldsymbol{E}(E_x, E_y, E_z)$表示需要轴的方向，则

$$\begin{cases} E_x=-K_1\lambda_0\lambda_1+\omega^*_{x_1} \\ E_y=-K_2\lambda_0\lambda_2+\omega^*_{y_1} \\ E_z=-K_3\lambda_0\lambda_3+\omega^*_{z_1} \end{cases} \tag{4.120}$$

则所谓"最佳控制轴法"即是"在每一瞬间都能用最接近于需要轴$\boldsymbol{E}$的控制轴$\boldsymbol{E}_{控}$来进行控制"的方法。

如果设两轴间的夹角为A，则

$$\cos A=\frac{E_xE_{控x}+E_yE_{控y}+E_zE_{控z}}{|\boldsymbol{E}|\ |\boldsymbol{E}_{控}|} \tag{4.121}$$

寻找最佳控制轴，即是在所有控制轴中找最大的$\cos A$。由于控制轴数量较大，计算起来是很复杂的，需要进一步进行简化。

在体坐标系$ox_1y_1z_1$中，作需要轴$\boldsymbol{E}(E_x, E_y, E_z)$，过点$(E_x, E_y, E_z)$作垂直于$\boldsymbol{E}$轴的平面$Q$，如图4.35所示，然后

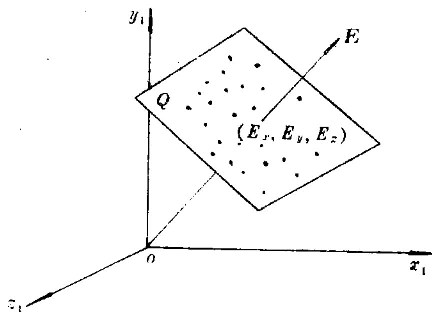


图 4.35 需要轴$\boldsymbol{E}$与其垂直平面Q示意图

找出所有控制轴$E_{控}$与平面Q的交点（也可能有若干控制轴与Q无交点），则这些交点中与（E_x，E_y，E_z）点距离最短的即是最佳控制轴。因E轴在体坐标系内的方程为

$$\frac{x_1}{E_x}=\frac{y_1}{E_y}=\frac{z_1}{E_z} \tag{4.122}$$

则过（E_x，E_y，E_z）点与此直线相垂直的平面方程为

$$E_x x_1+E_y y_1+E_z z_1-(E_x^2+E_y^2+E_z^2)=0$$

故在K瞬间过（E_x，E_y，E_z）点垂直于E轴的平面Q的方程为

$$E_{xk}x_{1k}+E_{yk}y_{1k}+E_{zk}z_{1k}-|E|^2=0 \tag{4.123}$$

而在K瞬间控制轴在体坐标系内的方程为

$$\frac{x_{1k}}{\alpha_k}=\frac{y_{1k}}{\beta_k}=\frac{z_{1k}}{\gamma_k} \tag{4.124}$$

设控制轴与平面Q在K瞬间的交点为(x_k^*，y_k^*，z_k^*)，则

$$\begin{cases} x_k^*=\dfrac{|E|^2}{E_{xk}+E_{yk}\dfrac{\beta_k}{\alpha_k}+E_{zk}\dfrac{\gamma_k}{\alpha_k}} \\ y_k^*=\dfrac{|E|^2}{E_{xk}\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}+E_{yk}+E_{zk}\dfrac{\gamma_k}{\beta_k}} \\ z_k^*=\dfrac{|E|^2}{E_{xk}\dfrac{\alpha_k}{\gamma_k}+E_{yk}\dfrac{\beta_k}{\gamma_k}+E_{zk}} \end{cases} \tag{4.125}$$

在K瞬间与（E_{xk}，E_{yk}，E_{zk}）点的距离

$$\rho_k^2=(x_k^*-E_{xk})^2+(y_k^*-E_{yk})^2+(z_k^*-E_{zk})^2 \tag{4.126}$$

故求$\min\rho_k$即是求

$$\begin{cases}\min|x_k^* - E_{xk}| = \min\left|\dfrac{E_{yk}^2\left(1-\dfrac{E_{xk}}{E_{yk}}\dfrac{\beta_k}{\alpha_k}\right)+E_{zk}^2\left(1-\dfrac{E_{xk}}{E_{zk}}\dfrac{\gamma_k}{\alpha_k}\right)}{E_{xk}+E_{yk}\dfrac{\beta_k}{\alpha_k}+E_{zk}\dfrac{\gamma_k}{\alpha_k}}\right| \\ \min|y_k^* - E_{yk}| = \min\left|\dfrac{E_{zk}^2\left(1-\dfrac{E_{yk}}{E_{zk}}\dfrac{\gamma_k}{\beta_k}\right)+E_{xk}^2\left(1-\dfrac{E_{yk}}{E_{xk}}\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}\right)}{E_{xk}\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}+E_{yk}+E_{zk}\dfrac{\gamma_k}{\beta_k}}\right| \\ \min|z_k^* - E_{zk}| = \min\left|\dfrac{E_{xk}^2\left(1-\dfrac{E_{zk}}{E_{xk}}\dfrac{\alpha_k}{\gamma_k}\right)+E_{yk}^2\left(1-\dfrac{E_{zk}}{E_{yk}}\dfrac{\beta_k}{\gamma_k}\right)}{E_{xk}\dfrac{\alpha_k}{\gamma_k}+E_{yk}\dfrac{\beta_k}{\gamma_k}+E_{zk}}\right|\end{cases} \tag{4.127}$$

可以看出，如果α、β、γ是连续变化的量，则取

$$\frac{E_{xk}}{E_{yk}}=\frac{\alpha_k}{\beta_k};\quad \frac{E_{xk}}{E_{zk}}=\frac{\alpha_k}{\gamma_k};\quad \frac{E_{yk}}{E_{zk}}=\frac{\beta_k}{\gamma_k}$$

即得最小值。但α、β、γ均为离散的量，故取

$$\min\left|\frac{E_{xk}}{E_{yk}}-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right|;\quad \min\left|\frac{E_{xk}}{E_{zk}}-\frac{\alpha_k}{\gamma_k}\right|;\quad \min\left|\frac{E_{yk}}{E_{zk}}-\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right| \tag{4.128}$$

如果利用(4.128)式求最佳控制轴，则需要运算

$$7\times5+7\times5+5\times5=95\text{次}$$

计算量仍很大，仍需进一步简化。取

$$\min|E_{xk}-\alpha_k|;\quad \min|E_{yk}-\beta_k|;\quad \min|E_{zk}-\gamma_k|$$

即

$$\begin{cases}\min|(-K_1\lambda_{0k}\lambda_{1k}+\omega_{x_1k}^*)-\alpha_k| \\ \min|(-K_2\lambda_{0k}\lambda_{2k}+\omega_{y_1k}^*)-\beta_k| \\ \min|(-K_3\lambda_{0k}\lambda_{3k}+\omega_{zk_1}^*)-\gamma_k|\end{cases} \tag{4.129}$$

我们把按(4.129)式控制的方法，称为“最佳控制轴法”。如果给出l、m、n的各种可能值，则利用“最佳控制轴法”控

制时，可由下式给出 l 、m、 n 的选择公式

$$
la_{x_1}=\begin{cases}
2a_{x_1} & \text{当}\dfrac{-K_1\lambda_{0k}\lambda_{1k}+\omega^*_{x_1k}-\omega_{x_1k}}{\Delta t_k}=A_x\geqslant\dfrac{3}{2}a_{x_1}\text{时} \\
a_{x_1} & \text{当}\dfrac{3}{2}a_{x_1}>A_x\geqslant\dfrac{3}{4}a_{x_1}\text{时} \\
\dfrac{1}{2}a_{x_1} & \text{当}\dfrac{3}{4}a_{x_1}>A_x\geqslant\dfrac{1}{4}a_{x_1}\text{时} \\
0 & \text{当}\dfrac{1}{4}a_{x_1}>A_x\geqslant-\dfrac{1}{4}a_{x_1}\text{时} \\
-\dfrac{1}{2}a_{x_1} & \text{当}-\dfrac{1}{4}a_{x_1}>A_x\geqslant-\dfrac{3}{4}a_{x_1}\text{时} \\
-a_{x_1} & \text{当}-\dfrac{3}{4}a_{x_1}>A_x\geqslant-\dfrac{3}{2}a_{x_1}\text{时} \\
-2a_{x_1} & \text{当}-\dfrac{3}{2}a_{x_1}>A_x\text{时}
\end{cases}
\tag{4.130}
$$

如果将以上关系绘制在相平面（$-K_0\lambda_0\lambda_1$，$\omega_{x_1}-\omega^*_{x_1}$）上，则得出在“最佳控制轴法”控制下的开关曲线如图4.36所示。

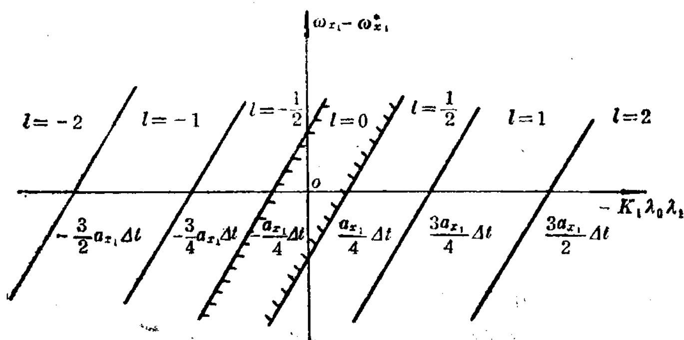


图 4.36 最佳控制轴法的开关曲线

同理可得

$$ma_{y_1}=\begin{cases}2a_{y_1} & 当\dfrac{-K_2\lambda_{0k}\lambda_{2k}+\omega^*_{y1k}-\omega_{y1k}}{\Delta t_k}=A_y\geqslant\dfrac{3}{2}a_{y_1}时\\ a_{y_1} & 当\dfrac{3}{2}a_{y_1}>A_y\geqslant\dfrac{3}{4}a_{y_1}时\\ 0 & 当\dfrac{3}{4}a_{y_1}>A_y\geqslant-\dfrac{3}{4}a_{y_1}时\\ -a_{y_1} & 当-\dfrac{3}{4}a_{y_1}>A_y\geqslant-\dfrac{3}{2}a_{y_1}时\\ -2a_{y_1} & 当-\dfrac{3}{2}a_{y_1}\geqslant A_y时\end{cases} \tag{4.131}$$

$$na_{z_1}=\begin{cases}2a_{z_1} & 当\dfrac{-K_3\lambda_{0k}\lambda_{3k}+\omega^*_{z1k}-\omega_{z1k}}{\Delta t_k}=A_z\geqslant\dfrac{3}{2}a_{z_1}时\\ a_{z_1} & 当\dfrac{3}{2}a_{z_1}>A_z\geqslant\dfrac{3}{4}a_{z_1}时\\ 0 & 当\dfrac{3}{4}a_{z_1}>A_z\geqslant-\dfrac{3}{4}a_{z_1}时\\ -a_{z_1} & 当-\dfrac{3}{4}a_{z_1}>A_z\geqslant-\dfrac{3}{2}a_{z_1}时\\ -2a_{z_1} & 当-\dfrac{3}{2}a_{z_1}\geqslant A_z时\end{cases} \tag{4.132}$$

其在相平面上的开关曲线如图4.37所示。

以上我们导出了最佳控制轴法的相平面开关曲线。研究极限情况，由(4.129)式知，此时

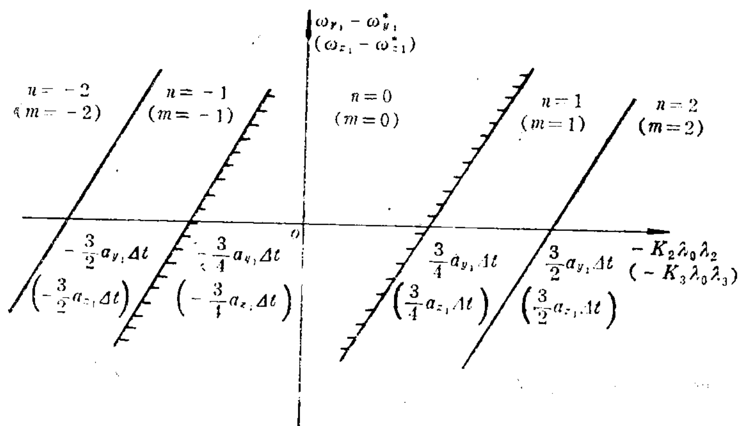


图 4.37 最佳控制轴法的开关曲线

$$
\begin{cases}
\Omega_1=\omega_{x_1}-\omega^*_{x_1}=-K_1\lambda_0\lambda_1 \\
\Omega_2=\omega_{y_1}-\omega^*_{y_1}=-K_2\lambda_0\lambda_2 \\
\Omega_3=\omega_{z_1}-\omega^*_{z_1}=-K_3\lambda_0\lambda_3
\end{cases}
\tag{4.133}
$$

如果令 $K_1=K_2=K_3=K$

则

$$
\begin{bmatrix}\dot\lambda_0\\ \dot\lambda_1\\ \dot\lambda_2\\ \dot\lambda_3\end{bmatrix}=
\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
0, & K\lambda_0\lambda_1, & K\lambda_0\lambda_2, & K\lambda_0\lambda_3 \\
-K\lambda_0\lambda_1, & 0, & K\lambda_0\lambda_3, & -K\lambda_0\lambda_2 \\
-K\lambda_0\lambda_2, & -K\lambda_0\lambda_3, & 0, & K\lambda_0\lambda_1 \\
-K\lambda_0\lambda_3, & K\lambda_0\lambda_2, & -K\lambda_0\lambda_1, & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}
\tag{4.134}
$$

即

$$
\begin{cases}
\dot{\lambda}_0 = \dfrac{1}{2} K \lambda_0 (1 - \lambda_0^2) \\
\dot{\lambda}_1 = -\dfrac{1}{2} K \lambda_0 \lambda_1 \\
\dot{\lambda}_2 = -\dfrac{1}{2} K \lambda_0 \lambda_2 \\
\dot{\lambda}_3 = -\dfrac{1}{2} K \lambda_0 \lambda_3
\end{cases}
\tag{4.135}
$$

设当$t = t_0$时，$\lambda_0(t_0) = \lambda_{00}$，$\lambda_1(t_0) = \lambda_{10}$，$\lambda_2(t_0) = \lambda_{20}$，$\lambda_3(t_0) = \lambda_{30}$则

$$
\begin{cases}
\lambda_0^2 = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1 - \lambda_{00}^2}{\lambda_{00}^2}\right) e^{-\frac{k}{2}(t - t_0)} + 1} \\
\lambda_1 = \lambda_{10} \sqrt{\left(\dfrac{1 - \lambda_0}{1 + \lambda_0}\right)\left(\dfrac{1 + \lambda_{00}}{1 - \lambda_{00}}\right)} \\
\lambda_2 = \lambda_{20} \sqrt{\left(\dfrac{1 - \lambda_0}{1 + \lambda_0}\right)\left(\dfrac{1 + \lambda_{00}}{1 - \lambda_{00}}\right)} \\
\lambda_3 = \lambda_{30} \sqrt{\left(\dfrac{1 - \lambda_0}{1 + \lambda_0}\right)\left(\dfrac{1 + \lambda_{00}}{1 - \lambda_{00}}\right)}
\end{cases}
\tag{4.136}
$$

由(4.135)或(4.136)式可以看出，在极限情况下，处于交联解耦状态。当t递增时，$\lambda_0 \to 1$，而λ_1、λ_2、λ_3均趋于零，此时误差衰减最快。但由于所能实现的控制轴方向是有限的，达不到极限情况，只能使控制最接近极限状态，故最佳控制轴法是次优的。

最后来研究一下，利用“最佳控制轴法”在相平面上能否形成极限环。以(λ_1, Ω_1)为例，如图4.36，由直线

$$\Omega_{x_1}+\frac{a_{x_1}}{4}\Delta t=-K_1\lambda_0\lambda_1 \text{ 和 } \Omega_{x_1}-\frac{a_{x_1}}{4}\Delta t=-K_1\lambda_0\lambda_1$$

所确定的区域为死区。当相点接近死区时，λ_1较小，由(4.133)和(4.135)式，可近似认为

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\Omega_1$$

则
$$\dot{\lambda}_1=\frac{1}{2}a_{x_1}$$

$$\lambda_1^2-\lambda_{10}^2=a_{x_1}(\lambda_1-\lambda_{10})$$

$$\Omega_1^2-\Omega_{10}^2=-\frac{4a_{x_1}}{K_1\lambda_0}[-K_1\lambda_0\lambda_1+K_1\lambda_0\lambda_{10}]$$

(4.137)

故在相平面$(-K_1\lambda_0\lambda_1,\ \Omega_{x_1})$内为一抛物线。如图4.38所示，

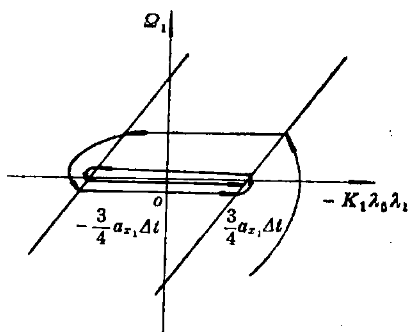


图 4.38 轨线示意图

可以形成极限环，但死区与控制步长有关。步长Δt很小时，死区也很小，喷嘴基本上处于连续开关状态。这是很不利的，为此将控制分为粗控区和精控区。当

$$\begin{cases}\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}=E^*\geqslant\delta \\ \sqrt{\dot{\lambda}_1^2+\dot{\lambda}_2^2+\dot{\lambda}_3^2}=\dot{E}^*\geqslant\epsilon\end{cases} \tag{4.138}$$

时，为粗控区，利用最佳控制轴法控制；而当$E^*<\delta, \dot{E}^*<\epsilon$时，则采用上节导出的开关曲线控制。如图4.39.

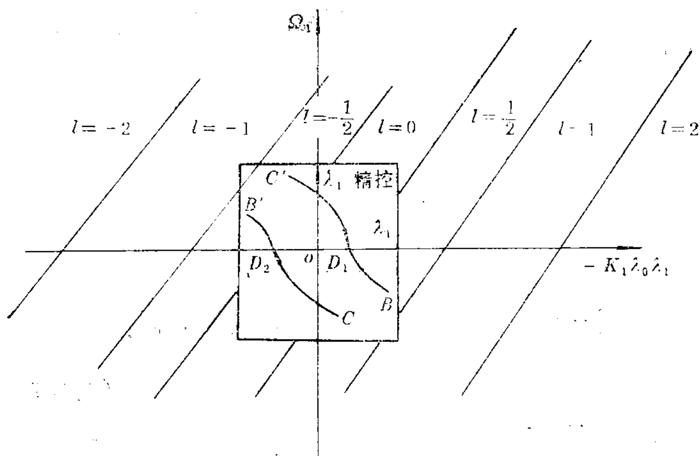


图 4.39 粗、精控开关曲线示意图

§6 航天飞行器几种典型的姿态控制举例

以上我们叙述了利用四元数作为误差信号的喷嘴控制规律，这一节通过几种典型的姿态控制问题，进一步说明姿态控制误差信号的取得和计算方法。

一、无动力飞行时，卫星的姿态控制

无动力飞行是指卫星上变轨发动机不工作，卫星沿惯性椭圆轨道运动的情况。此时的姿态控制问题，实际上即是定卫星上某一轴的指向。我们把卫星某一轴所应指的方向，称为需要方向。如果取地心惯性坐标系作为参考系，则需要方向与地心

惯性坐标系的关系只有两种情况。即需要坐标系对惯性坐标系固定和需要方向对惯性坐标系变化两种。以下分别来进行研究。

(1) 需要方向对惯性坐标系固定时的姿态控制

设地心惯性坐标系为$ox_0y_0z_0$，需要方向 ox^* 对惯性坐标系关系由β_0, α_0两个角来确定，如图4.40.

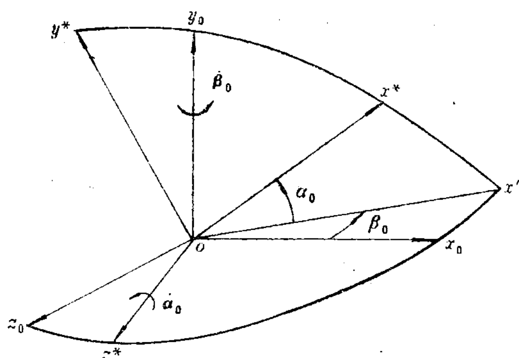


图 4.40 需要方向对惯性坐标系关系示意图

设卫星入轨后，其体坐标系为$ox_1y_1z_1$，其绝对旋转角速度为$\boldsymbol{\omega}$. 它在体坐标系各轴上的投影为ω_{x_1}、ω_{y_1}、ω_{z_1}. 如果姿态控制要求使ox_1轴指向需要方向ox^*，则其四元数误差信号求法如下。

设将体坐标系转为惯性坐标系的四元数为q，转为需要坐标系的四元数为λ；而将惯性坐标系转为需要坐标系的四元数

$$ox_1y_1z_1 \xrightarrow[\omega]{q} ox_0y_0z_0 \xrightarrow[\beta_0,\,\alpha_0]{M} ox^*y^*z^*$$

$$\lambda$$

图 4.41 坐标系关系示意

为M．如图4.41所示，则

$$\lambda = q * M \tag{4.139}$$

而

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\omega_1 * q \tag{4.140}$$

$$\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta_0}{2}, & 0, & -\sin\frac{\beta_0}{2}, & 0 \\ 0, & \cos\frac{\beta_0}{2}, & 0, & \sin\frac{\beta_0}{2} \\ \sin\frac{\beta_0}{2}, & 0, & \cos\frac{\beta_0}{2}, & 0 \\ 0, & -\sin\frac{\beta_0}{2}, & 0, & \cos\frac{\beta_0}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha_0}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin\frac{\alpha_0}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta_0}{2}\cos\frac{\alpha_0}{2} \\ \sin\frac{\beta_0}{2}\sin\frac{\alpha_0}{2} \\ \sin\frac{\beta_0}{2}\cos\frac{\alpha_0}{2} \\ \cos\frac{\beta_0}{2}\sin\frac{\alpha_0}{2} \end{pmatrix} \tag{4.141}$$

利用λ_1、λ_2、λ_3作为误差信号，即可进行姿态控制。

(2) 需要方向对地心惯性坐标系变化时的姿态控制

大多数卫星姿态控制的需要方向，对地心惯性坐标系都是变化的。变化特性随着卫星姿态控制的任务不同而不同。以地球物理学卫星为例，要求星体$\overline{ox}_1$轴指向地心。设该卫星的轨道根数为a、e、i、Ω、ω、T，如图4.42所示。如果卫星在M点，过M点作轨道坐标系$Mx_My_Mz_M$．My_M轴为M到地心O_E联线的延长线。向外为正，则需要方向在My_M轴的反方向上。

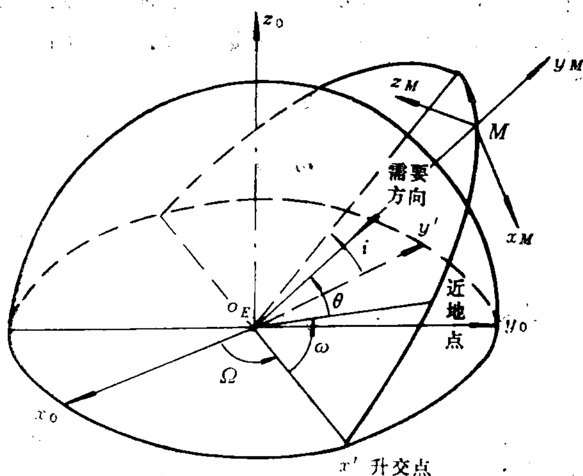


图 4.42 需要方向对地心惯性坐标系关系示意图

Mx_M 在轨道平面内飞行速度的反方向上，Mz_M 垂直于轨道面，形成右手坐标系，则需要方向（$-My_M$）与地心惯性坐标系关系可由Ω、i、ω、θ来确定．如图4.43．设体坐标系转

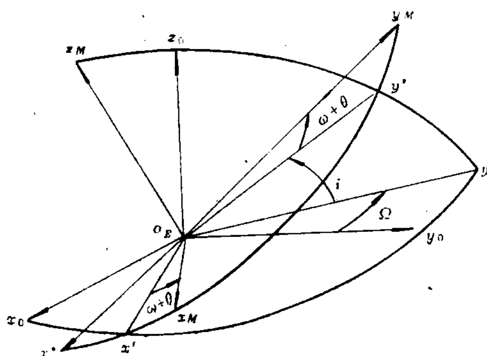


图 4.43 需要坐标系的确定

为惯性坐标系的四元数为 q，转为需要坐标的四元数为 λ，而将惯性坐标系转为需要坐标的四元数为 M。参看图4.41，则

$$\lambda = q * M \tag{4.142}$$

而

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\omega_1 * q \tag{4.143}$$

因

$$ox_0y_0z_0 \xrightarrow{\Omega} ox'y'z_0 \xrightarrow{i} ox'y''z_M \xrightarrow{\omega+\theta} ox_My_Mz_M \xrightarrow{\frac{3\pi}{2}} ox^*y^*z^*$$

故

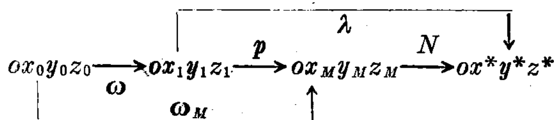
$$\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega/2 & 0 & 0 & -\sin\Omega/2 \\ 0 & \cos\Omega/2 & -\sin\Omega/2 & 0 \\ 0 & \sin\Omega/2 & \cos\Omega/2 & 0 \\ \sin\Omega/2 & 0 & 0 & \cos\Omega/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos i/2 & -\sin i/2 & 0 & 0 \\ \sin i/2 & \cos i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos i/2 & -\sin i/2 \\ 0 & 0 & \sin i/2 & \cos i/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\omega+\theta}{2}, & 0, & 0, & -\sin\frac{\omega+\theta}{2} \\ 0, & \cos\frac{\omega+\theta}{2}, & -\sin\frac{\omega+\theta}{2}, & 0 \\ 0, & \sin\frac{\omega+\theta}{2}, & \cos\frac{\omega+\theta}{2}, & 0 \\ \sin\frac{\omega+\theta}{2}, & 0, & 0, & \cos\frac{\omega+\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$
=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}
-\cos\frac{\Omega}{2}\cos\frac{i}{2}\cos\frac{\omega+\theta}{2}+\sin\frac{\Omega}{2}\cos\frac{i}{2}\sin\frac{\omega+\theta}{2} \\
\quad -\cos\frac{\Omega}{2}\cos\frac{i}{2}\sin\frac{\omega+\theta}{2}-\sin\frac{\Omega}{2}\cos\frac{i}{2}\cos\frac{\omega+\theta}{2} \\
-\cos\frac{\Omega}{2}\sin\frac{i}{2}\cos\frac{\omega+\theta}{2}-\sin\frac{\Omega}{2}\sin\frac{i}{2}\sin\frac{\omega+\theta}{2} \\
\quad -\cos\frac{\Omega}{2}\sin\frac{i}{2}\sin\frac{\omega+\theta}{2}+\sin\frac{\Omega}{2}\sin\frac{i}{2}\cos\frac{\omega+\theta}{2} \\
-\sin\frac{\Omega}{2}\sin\frac{i}{2}\cos\frac{\omega+\theta}{2}+\cos\frac{\Omega}{2}\sin\frac{i}{2}\sin\frac{\omega+\theta}{2} \\
\quad -\sin\frac{\Omega}{2}\sin\frac{i}{2}\sin\frac{\omega+\theta}{2}-\cos\frac{\Omega}{2}\sin\frac{i}{2}\cos\frac{\omega+\theta}{2} \\
-\sin\frac{\Omega}{2}\cos\frac{i}{2}\cos\frac{\omega+\theta}{2}-\cos\frac{\Omega}{2}\cos\frac{i}{2}\sin\frac{\omega+\theta}{2} \\
\quad -\sin\frac{\Omega}{2}\cos\frac{i}{2}\sin\frac{\omega+\theta}{2}-\cos\frac{\Omega}{2}\cos\frac{i}{2}\cos\frac{\omega+\theta}{2}
\end{pmatrix} \tag{4.144}
$$

由于假设飞行器在有心力场作用下，沿椭圆轨道运动，故轨道坐标系相对于惯性坐标系的旋转角速度沿 Mz_M 方向，垂直于轨道面。设其为$\omega_M=\omega_{MMz}$. 如果按以下次序求四元数



则

$$
\dot{p}=\frac{1}{2}p*\omega_M-\frac{1}{2}\omega_1*p \tag{4.145}
$$

$$N=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T \qquad (4.146)$$

则
$$\lambda=p*N \qquad (4.147)$$

亦可求出四元数 λ.

二、卫星拦截卫星时的姿态控制

如图4.44，设目标卫星的轨道根数为 a_M、e_M、i_M、Ω_M、ω_M、τ_M. 拦截卫星的轨道根数为a、e、i、Ω、ω、τ. 拦截起始瞬间，目标卫星在M点，到地心距离为$\boldsymbol{r}_M$；拦截卫星在A点，到地心距离为$\boldsymbol{r}_A$，速度矢量为$\dot{\boldsymbol{r}}_A$. 如果给定拦截时间T，则在T瞬间，目标卫星运动至B点，到地心距离为$\boldsymbol{r}_B$. 因而，

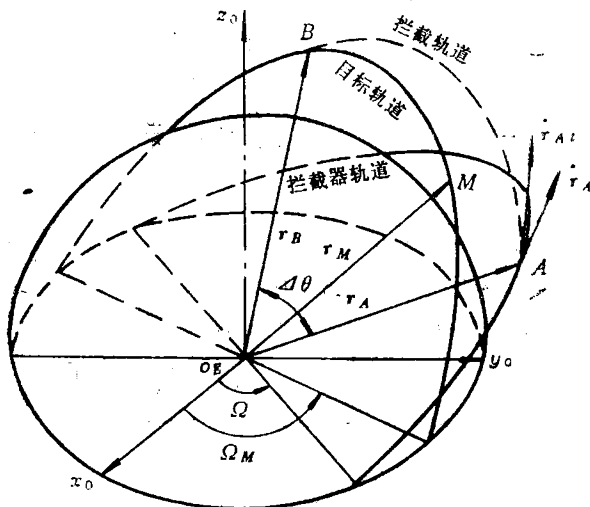


图 4.44 卫星拦截卫星示意图

拦截问题即是自A点控制拦截卫星，使其在T瞬间内在B点与目标卫星相遇。因为在给定时间T通过空间两定点A和B的椭圆轨道是唯一的，其在A点的速度矢量为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{At}=\sqrt{fM}\left(p_t^{\frac{1}{2}}\frac{\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B}{|\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{r}_B|}+p_t^{-\frac{1}{2}}\frac{\boldsymbol{r}_A}{|\boldsymbol{r}_A|}\mathrm{tg}\frac{\Delta\theta}{2}\right) \tag{4.148}$$

式中

$$\begin{cases}\Delta\theta=\arccos\left(\dfrac{\boldsymbol{r}_A\cdot\boldsymbol{r}_B}{|\boldsymbol{r}_A||\boldsymbol{r}_B|}\right)\\ p_t=\dfrac{\sqrt{|\boldsymbol{r}_A||\boldsymbol{r}_B|}}{B-\cos g}\dfrac{\sin^2\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\cos\dfrac{\Delta\theta}{2}}\\ B=\dfrac{|\boldsymbol{r}_A|+|\boldsymbol{r}_B|}{2\cos\dfrac{\Delta\theta}{2}\sqrt{|\boldsymbol{r}_A||\boldsymbol{r}_B|}}\end{cases} \tag{4.149}$$

fM为引力常数。

g为A，B两点偏近点角之差之半，可利用如下公式求出。因为沿椭圆轨道由A运动至B的时间

$$T_*(t)=\frac{A(t)}{\sqrt{fM}}\sqrt{B(t)-\cos g(t)}\cdot\left[1+\frac{[B(t)-\cos g(t)][2g(t)-\sin 2g(t)]}{2\sin^3 g(t)}\right] \tag{4.150}$$

式中
$$A(t)=2[r_A(t)r_B(t)]^{\frac{3}{4}}\cos^{\frac{3}{2}}\frac{\Delta\theta}{2} \tag{4.151}$$

因给定的拦截时间为T，则令$T_*=T$，解超越方程（4.150），即可求出g．通常利用如下的迭代方法。

选择初值 $g_0=\dfrac{\Delta\theta}{2}$ (4.152)

$$g_{n+1}=g_n-\left[\frac{T_*(t)-T^*(t)}{\dfrac{\partial T_*(t)}{\partial g}}\right]_n \tag{4.153}$$

式中　$T^*(t)=T-\Sigma\Delta t$　（Δt为计算步长）

$$\frac{\partial T_*}{\partial g}=\frac{T_*(t)[1+5\cos^2 g(t)-6B(t)\cos g(t)]}{2B(t)\sin g(t)-\sin 2g(t)}$$
$$+\frac{A(t)[y(t)+2B(t)\sin g(t)]}{\sqrt{fM}\sin^2 g(t)}\sqrt{B(t)-\cos g(t)} \tag{4.154}$$

迭代直至$|T_*(t)-T^*(t)|\leqslant\varepsilon_t$时为止，算出$g=g_n$.

将$g=g_n$代入(4.148)式，算出$\dot{\boldsymbol{r}}_{At}$,此速度称为$A$点的“需要速度”。令

$$\boldsymbol{I}_A=\dot{\boldsymbol{r}}_{At}-\dot{\boldsymbol{r}}_A \tag{4.155}$$

则$\boldsymbol{I}_A$为变轨发动机推力需要方向。如果变轨发动机固定在星体上，其推力方向与$\boldsymbol{ox}_1$轴一致，则姿态控制的任务在于将$\boldsymbol{ox}_1$轴控制到$\boldsymbol{I}_A$的方向，设$\boldsymbol{I}_A$与地心惯性坐标系$ox_0y_0z_0$的关系由φ_A、ψ_A确定，如图4.45.

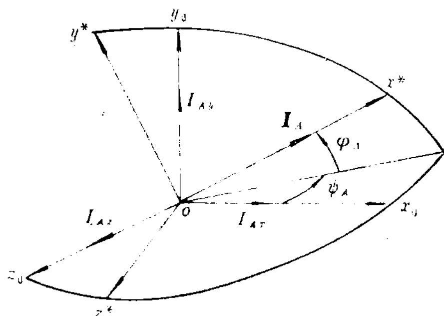


图 4.45　需要速度增量I_A与惯性坐标系关系

$$\begin{cases}\sin\psi_A=\dfrac{-I_{Az}}{\sqrt{I_{Ax}^2+I_{Az}^2}}\\[2ex]\cos\psi_A=\dfrac{I_{Ax}}{\sqrt{I_{Ax}^2+I_{Az}^2}}\end{cases}\tag{4.156}$$

$$\begin{cases}\sin\varphi_A=\dfrac{I_{Ay}}{I_A}\\[2ex]\cos\varphi_A=\dfrac{\sqrt{I_{Ax}^2+I_{Az}^2}}{I_A}\end{cases}\tag{4.157}$$

设地心惯性坐标系与需要坐标系 $ox^*y^*z^*$ 之间的四元数为 p，则

$$p=\left(\cos\frac{\psi_A}{2}\cos\frac{\varphi_A}{2},\ -\sin\frac{\psi_A}{2}\sin\frac{\varphi_A}{2},\right.$$
$$\left.\sin\frac{\psi_A}{2}\cos\frac{\varphi_A}{2},\ \cos\frac{\psi_A}{2}\sin\frac{\varphi_A}{2}\right)^T\tag{4.158}$$

设体坐标系转至惯性坐标系的四元数为 q，转至需要坐标系的四元数为 λ，则

$$\lambda=q*p\tag{4.159}$$

$$\dot{q}=\frac{1}{2}\omega_1*q\tag{4.160}$$

当 $|\varDelta\Theta|=|2\arcsin(\lambda_2^2+\lambda_3^2)^{\frac{1}{2}}|\leqslant\varepsilon$时，表示$\boldsymbol{ox}_1$轴已指向$\boldsymbol{I}_A$方向，启动变轨发动机，产生推力，控制拦截卫星的质心运动。由于变轨发动机推力是有限的，设控制步长为$\varDelta t$，至某瞬间

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_t-\dot{\boldsymbol{r}}|\leqslant\delta$$

时，关闭变轨发动机，其控制结构图如图4.46所示。

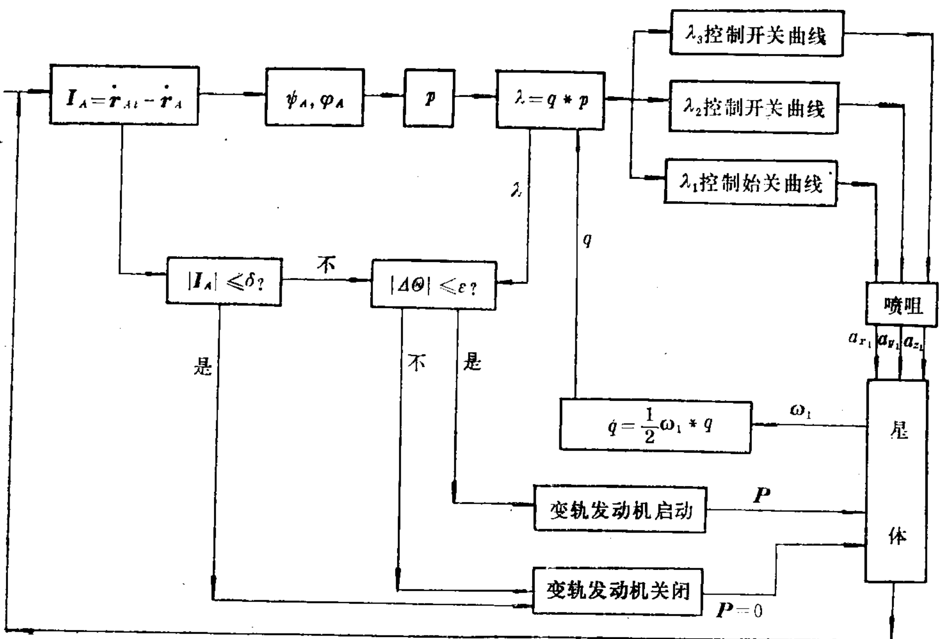


图 4.46 卫星拦截卫星结构方块图

参 考 文 献

[1] 周衍柏编，理论力学教程，人民教育出版社，1979.

[2] 程国采编著，弹道导弹制导方法与最优控制，国防科技大学出版社，1987.

[3] 黄圳珪编著，大型航天器动力学与控制，国防科技大学出版社，1990.

[4] [苏]B.H.勃拉涅茨，И.П.什梅格列夫斯基著，梁振和译，四元数在刚体定位问题中的应用，国防工业出版社，1977.

[5] 程国采，用四元数进行卫星姿态控制的最佳控制轴法，工学学报，总14期，1973.

[6] B.P. ICKES, A new method for performing digital control system attitude computations using quaternions, AIAA Journal, Vol.3 No.1-4, 1970.

[7] J.L.Junkins and J.D.Turner, Optimal continuous torque attitude maneuvers, Journal of Guidance and control, Vol.3 No.3 May-June, 1980.

[8] Brian Schletz, Use of quaternions in shuttle guidance, navigation and control, AIAA 82.1557.